تحقیقات منابع آب ایران
Iran-Water Resources Research

سال پنجم، شماره ۳، زمستان ۱۳۸۸
Volume 5, No. 3, Winter 2010 (IR-WRR)
۴۸-۵۵

Numerical Analyses of Flow in Transitions Using Grid Adaptive Method

M. R. Jaefarzadeh [1] and E. Alamatian [2]*

Abstract
In this research the two dimensional depth averaged shallow water equations are solved in transitions using MacCormack and two step Lax-Wendroff schemes over a fixed grid. In order to increase the accuracy of the results in the MacCormack scheme, the fixed grid is adjusted using a grid speed technique in each time step. This is a grid adaptive method in which the nodes come close to each other at the places where the flow characteristics (depth and velocity) vary intensely. In this article a new technique is proposed to prevent excessive concentration of the nodes. Using this technique the code run time is reduced considerably. In order to evaluate the accuracy of the results some laboratory tests were performed in a contraction transition. It is observed that the MacCormack scheme with the new grid adaptive technique is more compatible with the experimental results.

Keywords: Transitions, Adaptive grid, MacCormack scheme.

تحلیل عددی جریان در تبدیل‌ها با استفاده از شبکه تطبیقی

محمدرضا جعفرزاده[۱]* و ابراهیم علامتیان[۲]

چکیده
در این تحقیق معادلات دو بعدی متوسط گرفته شده در آب‌های کم عمق در تبدیل‌ها با استفاده از روش‌های عددی مک‌کورمک و لاکس وندروف دو گامی در یک شبکه ثابت حل می شود. آنگاه برای افزایش دقت جواب‌ها در روش مک کورمک، شبکه ثابت در هر گام زمانی به یک شبکه متحرک، با استفاده از تکنیک سرعت گرهی تبدیل می‌گردد. این کار اصطلاحاً "روش تطبیق شبکه" نامیده می‌شود و در آن گره‌ها در جاهایی که مشخصات جریان نظیر عمق و سرعت به‌شدت تغییر می‌کنند به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در این مقاله راهکار جدیدی به منظور جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره‌ها پیشنهاد شده است. با استفاده از این راهکار، زمان محاسبات کاهش پیدا می‌کند. برای ارزیابی صحت جواب‌های عددی، آزمایشاتی در یک تبدیل تنگ شونده انجام شد. ملاحظه می‌شود که روش مک کورمک همراه با راهکار جدید سازگاری بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد.

کلمات کلیدی: تبدیل‌ها، شبکه تطبیقی، روش مک کورمک.

تاریخ دریافت مقاله: ۳۰ شهریور ۱۳۸۶
تاریخ پذیرش مقاله: ۲۴ شهریور ۱۳۸۸

1- Associate professor, Dep. of Civil Eng., Ferdowsi University, Mashhad, Iran, Email: jafarzad@um.ac.ir
2- Ph.D. Student, Dep. of Civil Eng., Ferdowsi University, Mashhad, and assistant professor of Khavaran institute, Iran,
Email: alamatian@stu-mail.um.ac.ir
*- Corresponding Author

۱- دانشیار گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد
۲- دانشجوی دکتری عمران، دانشگاه فردوسی مشهد ـ عضو هیات علمی موسسه آموزش عالی خاوران
*- نویسنده مسئول

۱- مقدمه

تبدیل، سازه هیدرولیکی کوتاهی است که برای تغییر سطح مقطع جریان مورد استفاده قرار می‌گیرد. Hinds (1928) و Rouse, et al. (1951) از نخستین کسانی بودند که چگونگی جریان در تبدیل‌ها را بررسی کردند. Swamee & Basak (1992) روشهای طراحی تبدیل‌های باز شونده را ارائه دادند. Rahman & Chaudhry (1997) جریان فوق بحرانی در تبدیل‌های تنگ شونده و بازشونده را با استفاده از تکنیک شبکه متحرک مدل‌سازی کردند. Ming, et al. (2004) ضوابط طراحی بهینه تبدیل‌های تنگ شونده را در جریان فوق بحرانی ارائه کردند. اخیراً نیز Krüger & Rutschmann (2006) از توابع مرتبه بالا برای توزیع فشار و سرعت در معادلات کلاسیک آب‌های کم عمق در جریان فوق بحرانی در تبدیل‌ها استفاده کرده‌اند.

برای تحلیل عددی جریان در تبدیل‌ها باید معادلات دیفرانسیل آبهای کم عمق با درنظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه حل شوند. برای این منظور محدوده محاسباتی شبکه‌بندی می‌گردد. هر چند که افزایش تعداد گره‌ها در فضای حل منجر به کاهش خطای قطع می‌شود، اما افزایش بیش از حد تعداد گره‌ها باعث افزایش خطای گرد کردن نیز می‌گردد. به علاوه با زیاد شدن تعداد گره‌ها، زمان محاسباتی بیشتری برای حل معادلات دیفرانسیل صرف می‌شود. با استفاده از تکنیک‌های ویژه‌ای می‌توان در محل‌هایی از محدوده محاسباتی که تغییرات مشخصه‌های جریان، نظیر عمق و یا سرعت بسیار زیاد است و در زمان‌هایی که نیاز بیشتری وجود دارد، گره‌ها را متمرکز کرد و به طور مشابه در مناطقی که کمتر مورد نیاز است، از تمرکز گره‌ها کاست. در این صورت موقعیت گره‌ها در گامهای زمانی متوالی تغییر پیدا می‌کند. براین اساس Hindman & Spencer (1983) برای تعیین سرعت گره‌ها با استفاده از الگوی پخش مساوی[۱] معادله دیفرانسیل درجه دومی که آرایش گره‌ها از آن پیروی می‌کند، را مشخص کردند. همچنین Rai & Anderson (1982) آرایش گره‌ها را با استفاده از خطای ایجاد شده از روش عددی، در گام‌های محاسباتی اصلاح کردند.

در این تحقیق، معادلات دیفرانسیل آب‌های کم عمق در تبدیل‌ها با تغییر دستگاه مختصات و با استفاده از دو روش عددی مک‌کورمک و لاکس وندروف دو گامی ابتدا در یک شبکه ثابت حل شد. سپس برای افزایش دقت محاسبات در روش عددی مک کورمک با استفاده از تکنیک سرعت گره‌ها، شبکه ایجاد شده در هر گام زمانی اصلاح گردید؛ همچنین برای جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره‌ها، راهکار جدیدی پیشنهاد شد. در نهایت به منظور ارزیابی نتایج، جواب‌های عددی با داده‌های حاصل از یک مدل آزمایشگاهی مقایسه گردید.

۲- معادلات آب‌های کم عمق

معادلات آبهای کم عمق، با فرض اولیه توزیع فشار هیدرواستاتیکی و همچنین سیال غیر قابل تراکم، از متوسط گیری معادلات سه بعدی ناویر- استوکس در عمق جریان[۲] حاصل می‌شود. این معادلات، برای مطالعه بسیاری از پدیده‌های فیزیکی از جمله شکست سد، جریان درکانال‌های باز، امواج سیلابی، نیروهای عمل کننده بر سازه‌های ساحلی، انتقال آلودگی و... به کار می‌روند. شکل دو بعدی و غیر دائمی این معادلات در حالت بقاء در مختصات (x,y) به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=S(U) \qquad (۱)$$

$$U=\begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} \quad ; \quad F(U)=\begin{bmatrix} hu \\ hu^2+.5gh^2 \\ huv \end{bmatrix}$$

$$G(U)=\begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2+.5gh^2 \end{bmatrix} ; \; S(U)=\begin{bmatrix} 0 \\ gh(s_{0x}-s_{fx}) \\ gh(s_{0y}-s_{fy}) \end{bmatrix}$$

در روابط فوق h عمق جریان، u و v سرعت جریان و s_{0x} و s_{0y} شیب بستر کانال در جهات x و y، g شتاب جاذبه و s_{fx} و s_{fy} شیب‌های اصطکاکی می باشند و بر اساس رابطه مانینگ به صورت زیر تخمین زده می‌شوند:

$$s_{fx}=\frac{un^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{1.333}} \qquad (۲)$$

$$s_{fy}=\frac{vn^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{1.333}}$$

در این روابط n ضریب زبری مانینگ است. نظر بر آنکه سیستم معادلات (۱) در تبدیل با عرض متغیر حل می‌گردد، به منظور سهولت در محاسبات، دستگاه مختصات (x,y) در فضای فیزیکی با استفاده از تغییر متغیر زیر به دستگاه مختصات (ξ,η) در فضای محاسباتی تبدیل می شود (شکل (۱)):

$$\xi=x \qquad \eta=\frac{y}{b(x)} \qquad (۳)$$

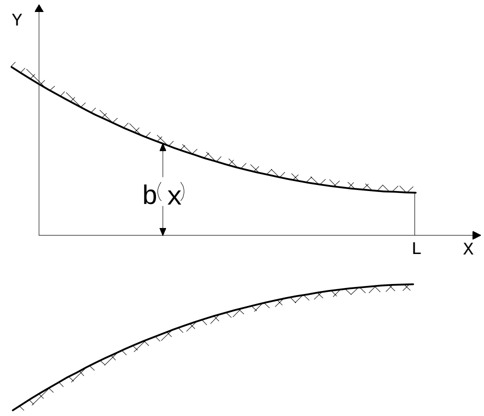
با اعمال روابط فوق در معادلات (۱) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(\xi)h)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[b(\xi)uh\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[vh-\eta b'(\xi)uh\right]=0 \qquad (۴)$$

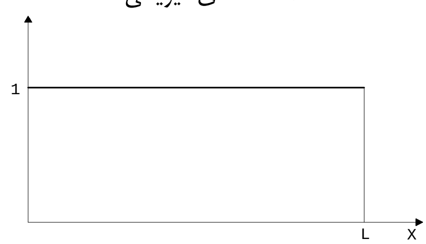
$$\frac{\partial}{\partial t}(b(\xi)uh)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[b(\xi)(u^2h+.5gh^2)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[uvh-\eta b'(\xi)(u^2h+.5gh^2)\right]$$
$$=b(\xi)gh(s_{0x}-s_{fx})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(\xi)vh)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[b(\xi)uvh\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[v^2h+.5gh^2-\eta b'(\xi)uvh\right]$$
$$=b(\xi)gh(s_{0y}-s_{fy})$$

$$b'(\xi)=\frac{db(\xi)}{d\xi}$$



الف-فضای فیزیکی



ب-فضای محاسباتی

شکل ۱- انتقال فضای فیزیکی به فضای محاسباتی

۳- الگوریتم تطبیق شبکه[۳]

Rai & Anderson (1982) الگوریتمی را برای تخمین سرعت گره‌ها با استفاده از خطای ایجاد شده از روش عددی، معرفی نمودند. در این روش، هنگامی که خطا در یکی از گره‌ها از متوسط میزان خطا در کل فضای محاسباتی بیشتر شود، آن گره به گره‌های مجاور نزدیک می‌گردد و هنگامی که خطا در گره مورد نظر کمتر از متوسط خطای کل فضای محاسباتی باشد، آن گره از گره‌های مجاور دور می‌شود. این روش اصطلاحاً به نام روش جذبی- دفعی[۴] نیز نامیده می‌شود. رای و اندرسون، مولفه‌های سرعت گره (i, j) در فضای محاسباتی را به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$(\xi_{i,j})_t=K_1\sum_{l=1}^{N}\left[\sum_{k=i+1}^{M}\left(\frac{|e^{\xi}|_{k,l}-|e^{\xi}|_{av_l}}{r^m}\right)-\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{|e^{\xi}|_{k,l}-|e^{\xi}|_{av_l}}{r^m}\right)\right] \qquad (۵)$$

$$(\eta_{i,j})_t=K_2\sum_{k=1}^{M}\left[\sum_{l=j+1}^{N}\left(\frac{|e^{\eta}|_{k,l}-|e^{\eta}|_{av_k}}{r^m}\right)-\sum_{l=1}^{j-1}\left(\frac{|e^{\eta}|_{k,l}-|e^{\eta}|_{av_k}}{r^m}\right)\right] \qquad (۶)$$

که در آن M و N تعداد گره‌ها، e^{ξ} و e^{η} شاخص تخمین خطا به ترتیب در جهت محورهای ξ و η، e^{ξ}_{av} و e^{η}_{av} متوسط میزان خطا در فضای حل، K_1، K_2 و m ضرایب ثابت و r فاصله بین دو گره می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r=\sqrt{(i-k)^2+(j-l)^2} \qquad (۷)$$

شاخص خطا مطابق روابط زیر تعریف می‌شود:

$$e^{\eta}=h_{\eta}x_{\eta} \qquad e^{\xi}=h_{\xi}x_{\xi} \qquad (۸)$$

مولفه‌های سرعت گره در فضای فیزیکی(x_t و y_t) نیز از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_t=\frac{\eta_y\xi_t-\xi_y\eta_t}{J} \qquad y_t=\frac{\xi_x\eta_t-\eta_x\xi_t}{J} \qquad (۹)$$

$$J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$$

در روابط (۸) و (۹) زیرنویس‌ها نشان دهنده مشتقات جزئی ($x_{\eta}=\partial x/\partial \eta$) و J جاکوبین تبدیل می‌باشد. همانطور که از روابط (۵) و (۶) مشخص است افزایش ضرایب K_1 و K_2 سرعت گره‌ها را زیاد می‌کند و با افزایش m از اثرات گره‌های دور کاسته می‌شود. افزایش سرعت گره‌ها باعث تمرکز بیش از اندازه آنها در مناطق خاصی از فضای محاسباتی می‌گردد. بنابراین به منظور کنترل سرعت گره‌ها باید ضرایب K_1، K_2 و m به نحو مناسبی انتخاب گردند.

۴- راهکار پیشنهادی برای جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره‌ها

برای جلوگیری از تمرکز بیش از حد گره‌ها، Rahman & Chaudhry (1997) سرعت گره‌ها را در هر گام زمانی با استفاده از" تغییرات جاکوبین تبدیل" اصلاح کردند؛ برای این منظور متغیر $R_{i,j}$ بصورت زیر تعریف شد:

$$R_{i,j}=\begin{cases} J^k_{i,j}/J^1_{i,j} & \text{if} \quad J^k_{i,j}/J^1_{i,j}\succ 1 \\ J^1_{i,j}/J^k_{i,j} & \text{if} \quad J^1_{i,j}/J^k_{i,j}\succ 1 \end{cases} \qquad (۱۰)$$

در روابط فوق $J^1_{i,j}$ جاکوبین اولیه (در زمان $t=0$) و $J^k_{i,j}$ جاکوبین درگام زمانی k ام می‌باشد. در هر گام زمانی، اگر میزان $R_{i,j}$ از

میزان حداکثری $R_{\max}$ بیشتر شود، سرعت گره‌ها به وسیله روابط زیر اصلاح می‌گردد:

$$R_{i,j\max} = \max(R_{i,j})$$
$$(\xi_{i,j})_{t_{actual}} = D(\xi_{i,j})_{t_{calculated}}$$
$$(\eta_{i,j})_{t_{actual}} = D(\eta_{i,j})_{t_{calculated}} \quad (۱۱)$$
$$D = \exp\left[-\beta(\frac{R_{i,j\max}}{R_{\max}})^2\right]$$

در روابط فوق β و R_{max} ضرایب ثابت می‌باشند. کاربرد این روش به دلیل اضافه شدن دو ضریب ثابت جدید و همچنین محاسبات طولانی برای به دست آوردن مقدار جاکوبین زمانبر است. به پیشنهاد نویسندگان این مقاله می‌توان برای جلوگیری از تمرکز بیش از اندازه گره‌ها و یا تداخل آنها، ضرایب K_1 و K_2 را با روش مناسب تری انتخاب نمود. در این روش ضرایب سرعت گره‌ها به صورت نسبت حداکثر سرعت مجاز در شبکه به سرعت بیشینه گره‌ها در گام زمانی قبل در نظر گرفته می‌شود. حداکثر سرعت مجاز از نسبت حداقل فاصله گره‌ها به گام زمانی به دست می‌آید. در نتیجه روابط پیشنهادی برای تعیین K_1 و K_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_1 = \frac{\Delta\xi_{\min}}{\Delta t.[\xi_t]_{\max}}$$
$$K_2 = \frac{\Delta\eta_{\min}}{\Delta t.[\eta_t]_{\max}} \quad (۱۲)$$

که در آن $\Delta\xi_{\min}$ و $\Delta\eta_{\min}$ حداقل فاصله بین دو گره متوالی، $[\xi_t]_{\max}$ و $[\eta_t]_{\max}$ حداکثر سرعت گره‌های شبکه در جهت‌های ξ و η و Δt گام زمانی است. در روش پیشنهادی ابتدا سرعت گره‌ها با مقادیر تخمینی برای K_1 و K_2 (ترجیحا $K_1 = K_2 = 1$) و استفاده از روابط (۵) و (۶) تعیین می‌گردد. سپس با استفاده از رابطه (۱۲) مقادیر K_1 و K_2 بطور دقیق محاسبه شده و آرایش گره‌ها مشخص می‌شود. واضح است که در این روش بر خلاف روش رحمان و چاودری ضرایب K_1 و K_2 ثابت نیستند.

۵- روش عددی

برای حل معادلات دیفرانسیل آب‌های کم عمق از دو روش مک‌کورمک و لاکس وندروف دو گامی استفاده شد، (Anderson et al., 1984). هر دو روش فوق دارای دقت مرتبه دوم در مکان و زمان می‌باشند و باعث پخش خطاهای فاز و دامنه در فضای حل می‌گردند. توزیع خطای فاز در محل‌هایی که گرادیان متغیرها زیاد است، نوساناتی را به وجود می‌آورد. روش‌های مختلفی برای حذف نوسانات ایجاد شده وجود دارد. (Jameson et al., 1981) مقادیر متغیر وابسته در هر گام زمانی را با استفاده از روابط پیشنهادی زیر اصلاح کردند:

$$\alpha_{\xi_{i,j}} = \frac{\left|h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}\right|}{\left|h_{i+1,j}\right| + 2\left|h_{i,j}\right| + \left|h_{i-1,j}\right|}$$
$$\alpha_{\eta_{i,j}} = \frac{\left|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}\right|}{\left|h_{i,j+1}\right| + 2\left|h_{i,j}\right| + \left|h_{i,j-1}\right|} \quad (۱۳)$$

در گره‌های مرزی که $h_{i,j-1}$ یا $h_{i,j+1}$ وجود ندارد داریم:

$$\alpha_{\eta_{i,j}} = \frac{\left|h_{i,j-1} - h_{i,j}\right|}{\left|h_{i,j-1}\right| + \left|h_{i,j}\right|}$$
$$\alpha_{\eta_{i,j}} = \frac{\left|h_{i,j+1} - h_{i,j}\right|}{\left|h_{i,j+1}\right| + \left|h_{i,j}\right|} \quad (۱۴)$$

$$\varepsilon_{\eta_{i,j-1/2}} = \chi\max(\alpha_{\eta_{i,j-1}}, \alpha_{\eta_{i,j}}) \quad (۱۵)$$
$$\varepsilon_{\xi_{i-1/2,j}} = \chi\max(\alpha_{\xi_{i-1,j}}, \alpha_{\xi_{i,j}})$$

در این رابطه χ ثابت اتلاف نامیده می‌شود و با تغییر مقدار آن لزجت مصنوعی در مدل کنترل می‌شود. مقدار اصلاحی متغیر وابسته (u,v,h) در هر گام با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

(۱۶)

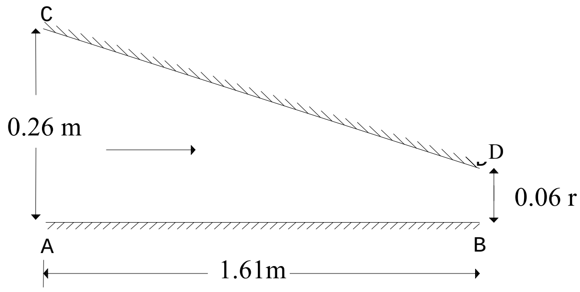
$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^{k+1} + \left[\varepsilon_{\xi_{i+1/2,j}}(f_{i+1,j}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1}) - \varepsilon_{\xi_{i-1/2,j}}(f_{i,j}^{k+1} - f_{i-1,j}^{k+1})\right]$$
$$+\left[\varepsilon_{\eta_{i,j+1/2}}(f_{i,j+1}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1}) - \varepsilon_{\xi_{i,j-1/2}}(f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j-1}^{k+1})\right]$$

در رابطه فوق $f_{i,j}^{k+1}$ میزان متغیر وابسته در گام زمانی $k+1$ در گره (i,j) است.

۶- ارزیابی مدل عددی

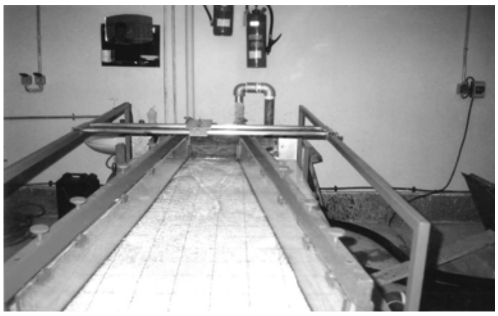
به منظور ارزیابی روش عددی، جریان فوق بحرانی در یک تبدیل تنگ شونده مطابق شکل ۲ مطالعه شد. طول تبدیل $1.61m$ بود و فضای حل به 26×48 گره تقسیم گردید. شرایط مرزی جریان در ورودی تبدیل دبی ثابت $Q = .0032 \, m^3/s$ و $v = 0$ بود. ضریب زبری مانینگ $n = .011$ و شیب طولی کانال نیز $S = .03169$ در نظر گرفته شد. ضریب m (در رابطه‌های (۵) و (۶)) بر اساس توصیه Rahman & Chaudhry (1997) $m = 0.65$ فرض شد. شرایط مرزی در خروجی تبدیل بوسیله درون‌یابی مقادیر وابسته (u,v,h) در هر گره مشخص شد. شرایط مرزی در دیواره‌ها نیز با استفاده از روش انعکاسی تعیین گردید، Rahman & Chaudhry (1997). برای ارزیابی درستی نتایج بدست آمده، مدلی در آزمایشگاه

هیدرولیک دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد ساخته شد. طول مدل $1.61m$ بود. طراحی مدل به گونه‌ای انجام شد که توانایی اعمال شیب‌های مختلف طولی و زاویه‌های تنگ‌شدگی و بازشدگی گوناگون را دارا باشد، (شکل (۳)). یک کد کامپیوتری بر اساس روش‌های عددی مک‌کورمک با شبکه ثابت، مک‌کورمک با شبکه متغیر و لاکس وندروف با شبکه ثابت نوشته شد و برای داده‌های مسئله تا رسیدن به‌جریان دائمی، اجرا گردید. تطبیق شبکه با استفاده از راهکار پیشنهادی و بعد از هر پنج تکرار محاسباتی انجام گرفت.



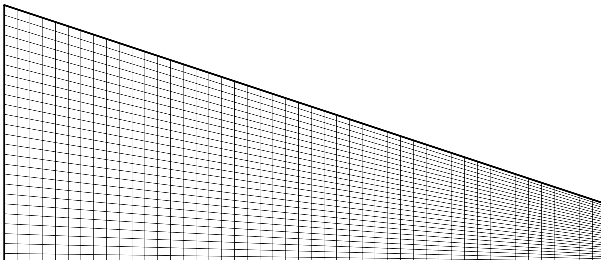
شکل ۲ - تبدیل تنگ شونده مورد مطالعه

شکل‌های ۴ و ۵ آرایش اولیه و نهایی گره‌ها را نشان می‌دهند. همانگونه که مشخص است تمرکز گره‌ها در محل‌هایی که تغییرات مشخصات جریان زیاد است (محل تشکیل امواج مورب ایستا) بیشتر شده است و به راحتی می‌توان از روی آرایش گره‌ها شکل و موقعیت امواج ایستای به وجود آمده را تعیین کرد.

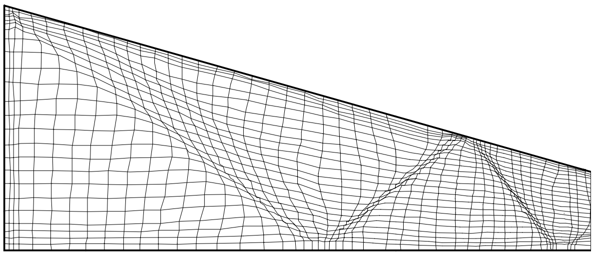


شکل ۳ - مدل آزمایشگاهی تبدیل تنگ شونده

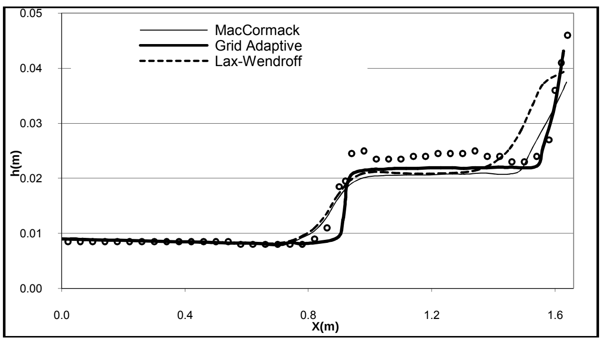
در شکل‌های ۶ و ۷ پروفیل جریان در امتداد دیوارهای جانبی مدل با استفاده از نتایج اندازه گیری شده و روش‌های مختلف عددی از جمله شبکه تطبیقی، مطابق راهکار پیشنهادی، رسم شده است. همانگونه که به صورت کیفی مشاهده می‌گردد، نتایج روش مک‌کورمک با تطبیق شبکه در مقایسه با روش‌های مک‌کورمک و لاکس وندروف در شبکه ثابت، با نتایج آزمایشگاهی همخوانی بیشتری دارد. در هر سه روش عددی حداکثر عمق آب در محل برخورد امواج مایل با دیوارها کمتر از عمق اندازه‌گیری شده تخمین زده شده است. بالا آمدن موضعی آب در کناره، ناشی از برخورد جت مانند آب به دیواره است. احتمالاً در این موقعیت معادلات متوسط گرفته شده در عمق سنت- ونانت صادق نیستند.



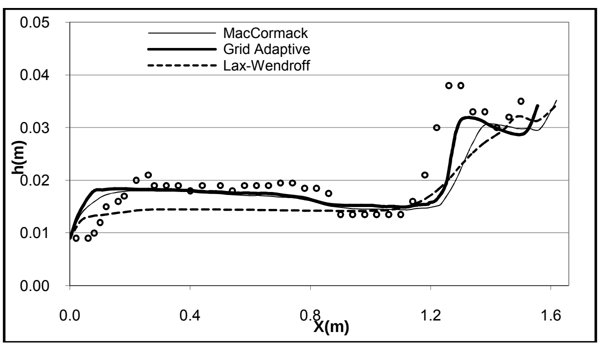
شکل ۴ - آرایش اولیه گره‌ها در تبدیل تنگ شونده



شکل ۵ - آرایش نهایی گره‌ها در تبدیل تنگ شونده



شکل ۶ - پروفیل سطح آب در امتداد دیوار AB



شکل ۷ - پروفیل سطح آب در امتداد دیوار CD

بررسی دقیق تر و ارزیابی کمّی نتایج با استفاده از شاخص‌های آماری انجام می‌شود. برای این منظور سه شاخص خطا به صورت زیر تعریف می‌شوند، (Zoppou & Roberts, 2003):

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\left|\sum\left(h_{num}-h_{mes}\right)\right|}{\sum\left(h_{mes}\right)}\times 100 \\
E_2 &= \frac{\sum\left(h_{num}-h_{mes}\right)^2}{\sum\left(h_{mes}\right)^2}\times 100 \\
E_3 &= \frac{\sum\left|h_{num}-h_{mes}\right|}{\sum\left|h_{mes}\right|}\times 100
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

که در آن h_{num} عمق جریان در مدل عددی و h_{mes} عمق اندازه‌گیری شده آب می باشد.

مقادیر پارامترهای بی بعد خطا برای روش‌های مختلف عددی در جدول ۱ در امتداد دیوارهای AB و CD درج شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود کمترین شاخص‌های خطا در امتداد هر دو دیوار از روش مک کورمک با شبکه تطبیقی به دست می‌آید. بنابرین روش مذکور از صحّت محاسباتی بیشتری برخوردار است. به منظور تحلیل رگرسیون خطی، اعماق متناظر اندازه‌گیری شده و محاسباتی از روش شبکه تطبیقی را در امتداد دیوارAB رسم می‌کنیم، آنگاه بر مجموعه نقاط یک خط برازش می‌دهیم، (شکل ۸). بدیهی است شیب خط مذکور در صورتی که نتایج عددی و آزمایشگاهی به یکدیگر نزدیک باشند، به سمت واحد میل می‌کند. معادله خط برازش شده و ضریب R^2 در همین شکل داده شده است. در جدول ۲ مقادیر ضریب زاویه و ضریب R^2 خطوط برازش شده بر اطلاعات آزمایشگاهی و عددی حاصل از روش‌های دیگر نیز درج شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، نزدیک‌ترین ضریب زاویه خط برازش شده به واحد، در امتداد هر دو دیوار، از روش شبکه تطبیقی به دست می‌آید.

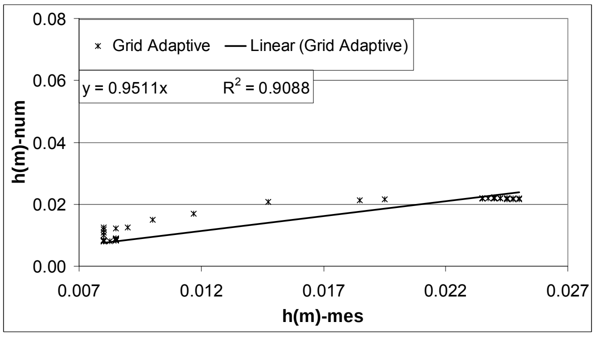
در شکل ۹، پروفیل سطح آب در امتداد دیوار AB برای روش‌های تطبیق شبکه مطابق راهکار پیشنهادی و روش رحمان و چاودری همراه با داده‌های آزمایشگاهی به طور کیفی مقایسه شده است.

جدول ۱- شاخص‌های خطا در روشهای گوناگون

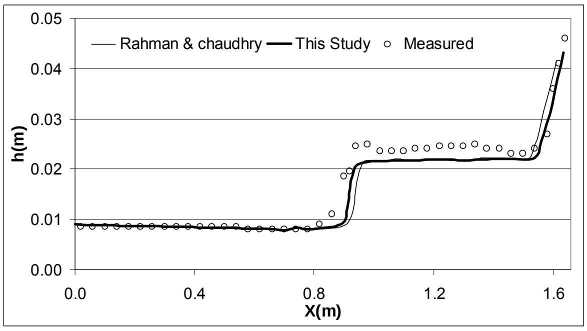
روش / پارامتر	روش مک کورمک (شبکه تطبیقی)		روش مک‌کورمک (شبکه ثابت)		روش لاکس وندروف (شبکه ثابت)	
	AB	CD	AB	CD	AB	CD
E_1	۱/۳	۱/۲۷	۲/۹۷	۴/۲۷	۱/۳۱	۱۳/۳
E_2	۱/۰۹	۲/۱۱	۳/۱۰	۲/۳۰	۳/۱۴	۴/۵۰
E_3	۱۰/۰	/۴۳	/۵۰	/۰۵	۱۳/۲۰	/۳۹

جدول ۲- مقادیر ضریب زاویه خط برازش شده بر اطلاعات عددی و آزمایشگاهی ($h_{num} = ah_{mes}$)

روش / پارامتر	روش مک‌کورمک (شبکه تطبیقی)		روش مک‌کورمک (شبکه ثابت)		روش لاکس وندروف (شبکه ثابت)	
	AB	CD	AB	CD	AB	CD
a	۰/۹۵	۰/۹۴	۰/۹۱	۰/۹۲	۰/۹۳	۰/۸۵
R^2	۰/۹۱	۰/۷۱	۰/۸۲	۰/۷۳	۰/۸۱	۰/۷۰



شکل ۸ – نتایج اندازه گیری شده و عددی(شبکه تطبیقی) در امتداد دیوار AB



شکل ۹ - پروفیل سطح آب در امتداد دیوار AB

همانطور که مشاهده می شود در لبه امواج تیز، جواب‌های راهکار پیشنهادی به نتایج آزمایشگاهی نزدیکتر است. در جدول ۳ نیز شاخص‌های مختلف خطا برای دو روش تطبیق شبکه در امتداد دیوارهای AB و CD درج شده است. ملاحظه می‌شود شاخص‌های خطا در راهکار پیشنهادی تا حدودی کاهش پیدا کرده‌اند.

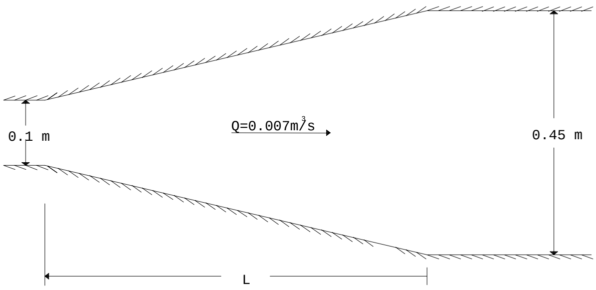
در جدول ۴، تأثیر ضریب x در رابطه (۱۵) بر زمان اجرا و گام‌های محاسباتی لازم برای رسیدن به دقت قابل قبول در روش‌های مختلف درج شده است. مطابق این جدول به ازای کلیه مقادیر χ زمان اجرای برنامه در شبکه ثابت کوتاه‌تر از شبکه متغیر است؛ هر چند که قبلاً ثابت شد که دقت جواب‌ها نیز کمتر می‌شود. در شبکه متغیر با راهکار پیشنهادی علیرغم آنکه تعداد گام‌های محاسباتی

افزایش پیدا کرده است، به علت روند بسیار ساده کنترل سرعت گره‌ها، مدت زمان محاسبات در مقایسه با روش رحمان و چاودری در حدود ۲۵ درصد کاهش یافته است. همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب x در کلیه مدل‌های عددی، تعداد گام‌های محاسباتی برای رسیدن به جواب کاهش می‌یابد. این امر به دلیل افزایش لزجت مصنوعی ایجاد شده در مدل عددی و هموار شدن نوسانات می‌باشد.

جدول ۳- شاخص‌های خطا در دو روش تطبیق شبکه

روش / پارامتر	روش رحمان و چادری		راهکار پیشنهادی	
	AB	CD	AB	CD
E_1	۱/۳	۱/۸	۱/۳	۱/۲۷
E_2	۱/۶۶	۲/۲۱	۱/۰۹	۲/۱۱
E_3	۱۰/۰۲	۱۲/۵۲	۱۰/۰	۱۲/۴۳

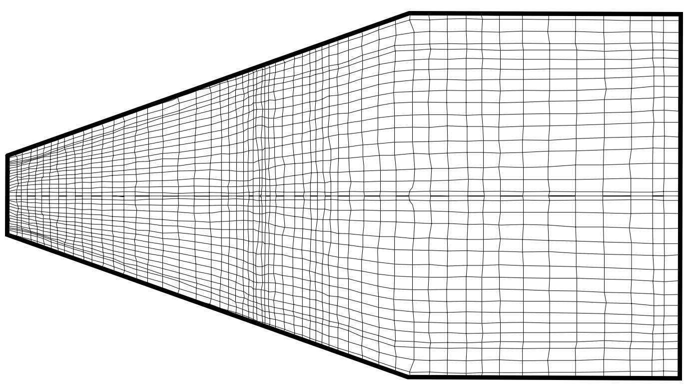
به منظور بررسی قابلیت روش‌های عددی در شبیه‌سازی هم زمان جریان‌های فوق و زیر بحرانی، تبدیل بازشونده‌ای به طول $L = 1.83m$ مطابق شکل ۱۰ درنظر گرفته شد. شیب طولی کانال $S_0 = .00017$ و ضریب زبری مانینگ $n = .015$ فرض گردید. شرایط جریان در ورودی $h = 0.06m$، $u = 1.167m/s$ و $v = 0$ $(Fr = 1.52)$ فرض شد. به منظور اعمال جریان زیر بحرانی در انتهای تبدیل مقدار $h = .07m$ در نظر گرفته شد. u و v با استفاده از درونیابی به دست آمدند. تطبیق شبکه نیز در هر ده گام محاسباتی انجام پذیرفت. برنامه کامپیوتری برای این مثال با روش‌های عددی مختلف اجرا شد. شکل ۱۱ آرایش نهایی گره‌ها را در روش مک کورمک با تطبیق شبکه نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است تمرکز گره‌ها در محل ایجاد پرش هیدرولیکی افزایش یافته است، اما در سایر مناطق، تغییر قابل ملاحظه‌ای در آرایش گره‌ها مشاهده نمی‌شود. شکل‌های ۱۲ و ۱۳ پروفیل سطح آب در محور تقارن و مرکز تبدیل را نشان می‌دهد. در این شکل‌ها نتایج به دست آمده از روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همانگونه که ملاحظه می‌شود، روش تطبیق شبکه، توانایی بیشتری در مدل کردن لبه تیز پرش هیدرولیکی دارد. به عبارت دیگر، خطاها در محل پرش در دو روش لاکس وندروف و مک‌کورمک با شبکه ثابت نسبت به روش مک‌کورمک با تطبیق شبکه بیشتر پخش می‌شوند. نکته قابل توجه اینکه پروفیل جریان در امتداد دیوار و محور تقارن تبدیل تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.



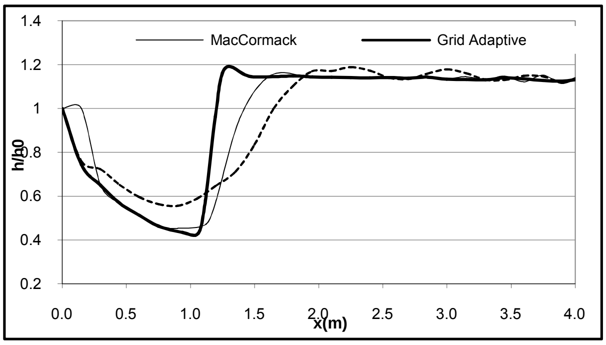
شکل ۱۰ - تبدیل باز شونده مورد مطالعه

جدول ۴- تأثیر ضریب χ در تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به جواب در روش مک‌کورمک

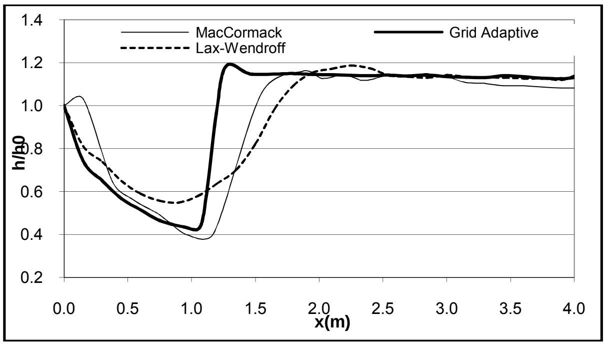
روش / X	شبکه ثابت		شبکه متغیر– روش رحمان و چاودری		شبکه متغیر– راهکار پیشنهادی	
	تکرار	زمان اجرا(ثانیه)	تکرار	زمان اجرا(ثانیه)	تکرار	زمان اجرا(ثانیه)
۰/۰۵	۷۹۴۵	۹۱۰	۴۷۹۵	۹۶۰۰	۵۶۱۰	۷۲۱۰
۰/۱۰	۶۴۷۰	۷۰۵	۳۸۹۰	۷۸۶۲	۴۵۸۵	۵۸۳۰
۰/۱۵	۵۲۶۵	۵۷۲	۳۳۵۰	۶۷۸۰	۳۷۲۰	۴۷۶۰
۰/۲۰	۴۸۰۵	۵۲۶	۲۸۵۰	۵۷۲۰	۳۳۵۰	۴۲۵۰



شکل ۱۱ - آرایش نهایی گره‌ها در تبدیل باز شونده



شکل ۱۲ - پروفیل سطح آب در امتداد دیوار تبدیل باز شونده



شکل ۱۳ - پروفیل سطح آب در محور تقارن تبدیل باز شونده

۷- نتیجه گیری

در این مقاله جریان دائمی در تبدیل‌ها با استفاده از معادلات ناماندگار آب‌های کم عمق، با روش‌های مک‌کورمک و لاکس وندروف دو گامی در شبکه ثابت مطالعه شد. سپس به منظور افزایش دقت جواب‌ها در روش مک کورمک در هر چند گام زمانی از روش تطبیق شبکه با راهکار جدیدی برای جلوگیری از تمرکز بیش از حد و یا تداخل گره‌ها استفاده شد. آنگاه برای صحت سنجی مدل‌های مختلف عددی، عمق جریان در یک تبدیل آزمایشگاهی نیز اندازه‌گیری شد. نتایج عددی نشان دادند که روش مک‌کورمک با شبکه تطبیقی همخوانی بیشتری در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی دارد. این روش به خوبی قادر است تا پیشانی تیز امواج را شبیه‌سازی کند. با استفاده از راهکار جدید، علاوه بر تخمین مناسب ضرایب ثابت روش رای و اندرسون، زمان محاسباتی نیز به میزان قابل توجهی نسبت به روش رحمان و چاودری کاهش پیدا کرده است.

پی‌نوشت‌ها

1. Equidistribution Scheme
2. Depth Averaging Flow
3. Grid Adaptive Algorithm
4. Attractive-Repulsive Method

۸- مراجع

Anderson, D. A., Tannehill, J. D. and Pletcher, R. H. (1984), *"Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer."* McGraw-Hill, New York.

Bhallamudi, S. M. and Chaudhry, M. H. (1992), "Computation of Flow in Open-Channel Transitions." *Journal of Hydraulic. Research*., IAHR. Vol. 30, pp. 77-93.

Hindman, R. G. and Spencer, F. (1983), "*Higher-Level Simulations of Turbulent Flow*." Hemisphere, New York, pp. 93-182.

Hinds, J. (1928), "The Hydraulic Design of Flume and Syphon Transition." Transactions, *ASCE*, Vol. 92, pp. 1423-1459.

Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, E. (1981), "Numerical Solutions of the Eluer Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes." *AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Palo alto, California, AIAA.

Krüger, S. M. and Rutschmann, P. (2006), "Modeling 3D Supercritical Flow With Extended Shallow-Water Approach." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 139, pp. 916-926.

Ming, H., Tung, H. and Tsang, J. (2004), "Optimal Channel Contraction for Supercritical Flows." *Journal of Hydraulic Research. IAHR*. Vol. 42, pp. 639–644.

Rahman, M. and Chaudhry, M. H. (1997), "Computation of Flow in Open-Channel Transitions." *Journal of Hydraulic Research*. Vol. 35, pp. 242-256.

Rai, M. M. and Anderson, D. A. (1982), "Grid Evolution in Time Asymptotic Problems." *Journal of Computational Physics*. Vol. 43, pp. 327-344.

Rouse, H., Bhoota, B. V. and Hsu, E. V. (1951), "Design of Channels Expansions." *Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels*, Transactions, *ASCE*, Vol. 116, pp. 363-374.

Swamee, P. K. and Basak, B. C. (1992), "Comprehensive Open Channel Expansion Transitions Design." *Journal of Irrigation and Drainage Eng*. Vol. 119, pp. 1-17.

Zoppou, C., Roberts, S. (2003), "Explicit Schemes for Dam-Break Simulations." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, pp. 11-34.