تحقیقات منابع آب ایران
Iran-Water Resources Research

سال یکم، شماره ۱، بهار ۱۳۸۴
Volume 1, No. 1, Spring 2005(IR - WRR)
۲۹-۳۹

# تحلیل عددی معادله جریان آب در ناحیه غیراشباع

لیلا فرهادی[۱] ، بهزاد عطایی آشتیانی[۱]

**چکیده**

در این مقاله حل عددی معادله جریان آب در ناحیه غیر اشباع برای حالتی که متغیر وابسته هد فشار است و حالتی که ترکیبی از هد فشار و محتوی آب محیط بکار می رود مورد بررسی قرار می‌گیرد و در ضمن حل یک مثال متداول تأثیر روش‌های مختلف متوسط‌گیری شاخص غیرخطی هدایت هیدرولیکی، نحوه تخمین ضریب ذخیره ویژه (حالت وتر و حالت مماس) ، روش جداسازی معادله و شرایط مختلف همگرایی بر روی دقت، عملکرد و زمان محاسبات این روشها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت نتیجه گرفته می‌شود که با انتخاب یک نحوه هدایت هیدرولیکی و استفاده از روش وتر برای محاسبه پارامتر ضریب ذخیره ویژه و در صورتی که از روش گسسته سازی کاملاً ضمنی استفاده شود، شکلی از معادله ریچاردز که در آن فشار متغیر وابسته است نتایج بسیار نزدیکی با شکل ترکیبی معادله ریچاردز که بطور معمول نتایج بهتری را ارائه می کند، می‌دهد و حتی در مواردی نتایج بهبود یافته است.

**واژه های کلیدی:** جریان در محیط غیر اشباع، مدلسازی عددی، روش تفاضلهای محدود، حل عددی.

# Numerical Solution of Water Flow in Unsaturated Zone

*L. Farhadi*[1], *B. Ataie Ashtiani*[2]

**Abstract**

The assessment of water flow in unsaturated zone is of interest in many hydrological and environmental problems. In this paper, two different form of governing equations of water flow in unsaturated zone are studied. The influences of discritization schemes, averaging methods of nonlinear interblock hydraulic conductivity, and different convergence criteria on the accuracy and performance of numerical models for these equations are investigated. It is shown that by choosing an appropriate form for determining the hydraulic conductivity and using the secant method for calculating the moisture capacity and implicit method for discritization, is chosen. By doing this, the type of Richards equation that has pressure as its dependent term gives very close results to the mix type of Richards equation. This later approach according to the previous studies had given better results.

**Keywords:** Unsaturated Flow, Numerical Modeling , Finite Diference , Numerical Methods.

[۱] دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

[1] *M.Sc., Water Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran*
[2] *Associate Professor Department of Civil Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran*

## ۱-مقدمه

در بسیاری از شاخه های مهندسی مانند هیدرولوژی و کشاورزی، مدلسازی نفوذ آب درخاک غیراشباع دارای اهمیت است. به طور عموم در بسیاری از کاربردهای عملی حل یک بعدی مسئله نفوذ آب در خاک کافی بنظر می رسد. معادله حاکم بر جریان آب درخاک غیراشباع به معادله *ریچاردز* معروف است. این معادله را که مبنای آن قانون بقای جرم وقانون جریان دارسی است، می توان به چندین شکل نوشت که عبارتند از:

(۱) هد فشار متغیر وابسته است.

$$c(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k(h)\frac{\partial h}{\partial z} - k(h)\right)$$

(۲) محتوی رطوبت متغیر وابسته است.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z} - k(\theta)\right)$$

(۳) شکل ترکیبی یا مخلوط

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k(h)\frac{\partial h}{\partial z} - k(h)\right)$$

که در آن، h[L] هد فشار،شاخص بی بعد $\theta$ محتوی رطوبت، $c(h) = \frac{d\theta}{dh}[\frac{1}{L}]$، ضریب ذخیره ویژه رطوبت مخصوص، $k(h)\,[\frac{L}{T}]$ ضریب هدایت هیدرولیکی غیراشباع، $D(\theta)[\frac{L^2}{T}]$ ضریب پخشیدگی غیراشباع و Z [L] مختصات عمودی است که در جهت رو به پایین مثبت فرض شده است[Celia and Bouloutas(1990)] و [Gottardiand Venutelli (1993)] . شکلی ازمعادله ریچاردز که درآن متغیر وابسته هد فشار است می تواند برای بیان حرکت آب در محیطهای متخلخل اشباع ،غیراشباع بکار رود. ولی بازده مدلسازی کامپیوتری منطبق با این پدیده در شرایط خاص می‌تواند به طور جدی نقصان یابد، به عنوان مثال وقتی که با پدیده نفوذ در خاکهای نسبتاً خشک مواجه هستیم. به منظور غلبه بر برخی از مشکلات عدم بقای جرم در شکلی از معادله که هد فشار به عنوان متغیر وابسته مطرح است، استفاده از محتوی رطوبت بجای پتانسیل فشار به عنوان متغیر وابسته پیشنهاد شده است. در مطالعاتی از سوی برخی دانشمندان از جمله Celia and Bouloutas(1990) صورت گرفته استفاده از شکل ترکیبی معادله که در آن هم هد فشار و هم ذخیره آبی به عنوان متغیرهای وابسته مطرح هستند به عنوان راه‌حل برتر پیشنهاد شده است [Romano and Santini (1998)].

برای حل چنین شکلهایی از معادله ریچاردز کارهای تحقیقاتی زیادی صورت گرفته ولی مسلم است که به علت وجود ارتباط بسیار غیرخطی بین پارامترهای k ،c ،D ،h و $\theta$، یافتن یک راه‌حل تحلیلی برای چنین معادلاتی بسیار مشکل است و به همین دلیل روشهای عددی به عنوان یک راه‌حل مناسب بکار می‌روند. در روشهای عددی بکارگیری روشهای مختلف جداسازی و روشهای مختلف تخمین شاخص های غیرخطی هدایت هیدرولیکی(k) و ضریب ذخیره ویژه (c) و شرایط همگرایی مختلف منجر به پاسخ های با دقت‌های متفاوت می‌شود [Gottardi and Venutelli (1993)].

در این مقاله دو شکل از معادله ریچاردز، شکلی که متغیر وابسته فشار است وشکل ترکیبی یا مخلوط معادله ریچاردز که براساس تحقیقات [Celia and Bouloutas(1990)] نسبت به فرمهای دیگر معادله ریچاردز بهتری برخوردار است مورد بررسی قرار می گیرد. هدف بررسی تأثیر روش های مختلف متوسط‌گیری شاخص غیرخطی هدایت هیدرولیکی (k) و نحوه مختلف تخمین ضریب ذخیره ویژه (c) و فرمهای مختلف جداسازی و شرایط همگرایی، بردقت، عملکرد و کاهش زمان محاسبات این روشهاست. در نهایت این نکته بررسی می‌شود که انتخاب صحیح شاخص ها تا چه حد در بهبود نتایج شکلی از معادله ریچاردز که در آن فشار متغیر وابسته است و نزدیک شدن پاسخ های آن به پاسخ های شکل ترکیبی یا مخلوط مؤثر است.

## ۲- توصیف روشهای تحلیل عددی

در این بخش به بررسی روشها و تخمین‌های عددی که به منظور حل معادله ریچاردز صورت گرفته است پرداخته می شود.

### ۲-۱-روشهای مختلف گسسته‌سازی

گسسته‌سازی سه شکل معادله ریچاردز منجر به یک دستگاه معادلات غیرخطی سه قطری به صورت زیر می‌شود.

$$A_i^m \delta_{i-1}^{m+1} + B_i^m \delta_i^{m+1} + C_i^m \delta_{i+1}^{m+1} = R_i^m \qquad \{i = 1,2,\dots,n\} \qquad (۴)$$

که در آن ضرایب $A_i^m$ ، $B_i^m$ ، $C_i^m$ ، $R_i^m$ توابع غیرخطی از متغیرهای h و$\theta$ هستند و متغیر وابسته $\delta_j^{m+1} = h_j^{m+1} - h_j^m$ و یا $\theta_j^{m+1} = \theta_j^{m+1} - \theta_j^m$ عبارتند از نقصان متغیرهای h و$\theta$ برای عبور از مرحله سعی و خطای m به مرحله سعی و خطای m+1 است.کمیت ها با نمایه m وm+1 در دو مرحله سعی و خطای متوالی در زمان $t = (n+1)\Delta t$ محاسبه می‌شوند وکمیت ها با n در زمان $t = n\Delta t$ محاسبه می شوند که $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ است [ Gottardi and Venutelli (1993)].

- تخمین استاندارد تفاضل محدود از شکلی از معادله ریچاردز هد فشار متغیر وابسته است با روش گسسته‌سازی کاملاً ضمنی عبارت است از:

$$C_i^m \frac{h_i^{m+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{k_{i-1/2}^m}{\Delta z^2}\left[h_{i-1}^{m+1} - h_i^{m+1}\right] + \frac{k_{i+1/2}^m}{\Delta z^2}\left[h_{i+1}^{m+1} - h_i^{m+1}\right] - \frac{k_{i+1/2}^m - k_{i-1/2}^m}{\Delta z} \qquad (۵)$$

که در آن $k_{i+1/2}^{m}$ مشخص‌کننده ضریب هدایت هیدرولیکی بین بلوکهاست، با تعریف $\delta_i^{m+1}$ $(\delta_i^{m+1} = h_i^{m+1} - h_i^m)$، به عنوان نقصان از هدفشار بین دو مرحله سعی و خطای متوالی داریم.

$$h_i^{m+1} = h_i^m + \delta_i^{m+1} \qquad (۶)$$

برای بلوکها یا نقاط شبکه‌ای i و i−1 نیز این عمل را انجام می‌دهیم. با جاگذاری معادله (۶) در معادله (۵)، معادله (۵) به شکل معادله (۴) تبدیل می شود که در آن :

$$A_i^m = \frac{-k_{i-1/2}^m}{\Delta Z^2}$$
$$B_i^m = \frac{C_i^m}{\Delta t} + \frac{k_{i-1/2}^m}{(\Delta Z)^2} + \frac{k_{i+1/2}^m}{(\Delta Z)^2}, \qquad (۷)$$
$$C_i^m = \frac{-k_{i+1/2}^m}{(\Delta Z)^2}$$

برای سایر روشها نیز با توجه به فرم گسسته سازی اعمال شده دستگاه سه قطری تشکیل شده و معادلات حل می شوند.

- تخمین استاندارد تفاضل محدود از شکلی از معادله ریچاردز که در آن فشار متغیر وابسته است با استفاده از روش گسسته‌سازی کرنک – نیکلسون: (۸)

$$C_i^m \frac{h_i^{m+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta Z}\left[k_{i+1/2}^m\left(\frac{h_{i+1}^{m+1} - h_i^{m+1}}{2\Delta Z} + \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{2\Delta Z} - 1\right) - k_{i-1/2}^{m+1}\left(\frac{h_i^{m+1} - h_{i-1}^{m+1}}{2\Delta Z} + \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{2\Delta Z} - 1\right)\right]$$

- تخمین استاندارد تفاضل محدود از فرم ترکیبی معادله ریچاردز با استفاده از روش گسسته‌سازی اولر با گام پسین یا روش کاملاً ضمنی: (۹)

$$\frac{\theta_i^{m+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = \frac{k_{i-1/2}^{m+1}}{(\Delta Z)^2}(h_{i-1}^{m+1} - h_i^{m+1}) + \frac{k_{i+1/2}^m}{\Delta Z^2}(h_{i+1}^{m+1} - h_i^{m+1}) - \frac{k_{i+1/2}^m - k_{i-1/2}^m}{\Delta Z}$$

- تخمین استاندارد تفاضل محدود از فرم ترکیبی معادله ریچاردز با استفاده از روش گسسته‌سازی کرنک–نیکلسون: (۱۰)

$$\frac{\theta_i^{m+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta Z}\left[k_{i-1/2}^{m+1}\left(\frac{h_{i-1}^{m+1} - h_i^{m+1}}{2\Delta Z} + \frac{h_{i-1}^n - h_i^n}{2\Delta Z} - 1\right) + k_{i+1/2}^m\left(\frac{h_{i+1}^{m+1} - h_i^{m+1}}{2\Delta Z} + \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{2\Delta Z} - 1\right)\right]$$

## ۲-۲-روابط مربوط به نحوه محاسبه ضریب ذخیره ویژه

با توجه به اینکه رطوبت منظور شده برای گره‌های مختلف تابعی از هد آن گره‌هاست داریم :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\theta}{\partial h} \times \frac{\partial h}{\partial t} = c\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (۱۱)$$

بنابراین c یا ضریب ذخیره ویژه در معادله ریچاردز به صورت مشتق پاره‌ای $\theta$ نسبت به h تعریف شده است. ضریب ذخیره ویژه به دو صورت مختلف تخمین زده می‌شود که عبارتند از :

۱. فرم مماس
۲. فرم وتر

در فرم مماس براساس رابطه تحلیلی که بین $\theta$ و h خاکهای مختلف وجود دارد، به صورت تحلیلی از $\theta$ نسبت به h مشتق می‌گیریم [Gottardi and Venutelli (1993)]. در فرم وتر یا فرم شیب وتری استاندارد برای رابطه c یا رابطه $\frac{\partial\theta}{\partial h}$ یک تقریب تفاضل محدود زده می‌شود به این صورت که برای هر مرحله از سعی و خطا داریم [Rathfelder and Abriola (1994)].

$$C_i^{SCS} = \frac{\theta_i^m - \theta_{i,t}}{h_i^m - h_{i,t}} \qquad (۱۲)$$

## ۲-۳-روابط مربوط به نحوه متوسط‌گیری ضریب هدایت هیدرولیکی

نحوه متوسط‌گیری شاخص غیرخطی ضریب هدایت هیدرولیکی k بردقت، عملکرد و زمان انجام محاسبات روش‌های عددی تأثیرگذار است. در این مقاله تأثیر ۵ نحوه مختلف و متداول متوسط‌گیری هدایت هیدرولیکی بر نتایج روشهای عددی در ضمن یک مثال بررسی می شود. این روشهای متوسط‌گیری عبارتند از :

۱.روش متوسط حسابی $k_{i+1/2} = 0.5(k_i + k_{i\pm1})$

۲. روش متوسط هارمونیک: $k_{i\pm1/2} = \dfrac{2k_i \times k_{i\pm1}}{k_i \pm k_{i\pm1}}$

۳. روش متوسط هندسی : $k_{i\pm1/2} = (k_i \times k_{i\pm1})^{1/2}$

۴. روش متوسط بالادست :

اگر $h_{i\pm1} > h_i$ یا $\theta_{i\pm1} > \theta_i$ آنگاه $k_{i\pm1/2}^{up} = k_{i\pm1}$

اگر $h_i > h_{i\pm1}$ یا $\theta_i > \theta_{i\pm1}$ آنگاه $k_{i\pm1/2}^{up} = k_i$

۵. روش متوسط حسابی هدها: $k_{i\pm1/2} = k\left(\dfrac{h_i + h_{i\pm1}}{2}\right)$

## ۲-۴-انواع مختلف روشهای همگرایی

به منظور بهبود بازده محاسباتی، شرط همگرایی به کار رفته یکی از موارد قابل توجه است. در این مقاله سه شرط همگرایی مختلف و تأثیر این شرایط بر دقت، قدرت و زمان محاسباتی روش‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد [Huang et al. (1996)].

در شبیه سازی عددی معادله ریچاردز که درآن هد فشار متغیر وابسته مسئله است مقدار هد فشار درگام زمانی جدید ابتدا حدس زده می‌شود و سپس به صورت دنباله‌دار اصلاح می‌شود. فرآیند سعی و خطا ادامه می‌یابد تا جایی که اختلاف بین میزان محاسبه شده فشار هر گره، بین دو مرحله سعی و

خطای موفق کمتر از مقدار خطای مجاز $(\delta_a)$ از قبل انتخاب شده باشد و تا جایی که نامساوی زیر در همه گره‌ها برقرار شود.

$$|\delta^m| = |h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}| \le \delta_a \qquad (۱۳)$$

این شرط همگرایی در مطالعات عددی به عنوان یک شرط استاندارد مطرح است که مقدار $(\delta_a)$ در آن به صورت گسترده‌ای متغیر است. نوع دیگری از شرایط همگرایی که توسط محققان پیشنهاد شده است شامل هر دو خطای مطلق $(\delta_a)$ و خطای نسبی $(\delta_r)$ است.

$$|\delta^m| = |h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}| \le \delta r |h^{n+1,m+1}| + \delta_a \qquad (۱۴)$$

این شرط همگرایی ، شرط همگرایی ترکیبی نام‌گذاری شده است. مقادیر انتخاب شده برای مقدار خطای مجاز به صورت متداول بین۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ است و با توجه به دقت موردنظر تغییر می‌کند. با توجه به بسط سری تیلور $\theta^{n+1,m+1}$ پیشنهاد شده است که کل ترم ذخیره $(c^{n+1}\delta^m)$ از معادله بجای خطای مطلق $\delta^m$ در شرط همگرایی منظور شود و شرط همگرایی استاندارد بصورت زیر تغییر یافته و شرط همگرایی حالت $\theta$ نام گذاری شود [ Huang et al. (1996) ].

$$\theta^{n+1,m+1} = \theta^{n+1,m} + \left(\frac{d\theta}{dh}\right)^{n+1,m}(h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) + o[(\delta^m)^2] \qquad (۱۵)$$

$$\delta^m = h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}$$

$$R_i^m = \frac{k_{i-1/2}^m}{\Delta Z^2}(h_{i-1}^m - h_i^m) + \frac{k_{i+1/2}^m}{\Delta Z^2}(h_{i+1}^m - h_i^m) - \frac{k_{i+1/2}^m - k_{i-1/2}^m}{\Delta Z} - C_i^m \frac{h_i^m - h_i^n}{\Delta t}$$

$$c^{n+1,m}|\delta^m| = |\theta^{n+1,m+1} - \theta^{n+1,m}| \le \delta_\theta \qquad (۱۶)$$

## ۲-۵-نحوه مقایسه نتایج

به منظور مقایسه نتایج روشهای بکار رفته سه پارامتر تعادل جرمی، حداقل جذر مربعات خطاهای نسبی و متوسط تعداد سعی و خطاهای هر روش عددی برای دستیابی به هر گام زمانی مورد مقایسه قرار گرفته است.

یکی از روشهای تخمین صحت یک روش عددی توانایی آن در حفظ جرم در میدان مورد مطالعه است. بقای جرم، به منظور بررسی توانایی یک شبیه‌ساز عددی یک شرط لازم است ولی شرط کافی نیست [Celia and Bouloutas (1990)]. معیار تعادل جرمی به صورت زیر معرفی می شود:

$$MB(t) = \left[\frac{(M^t - M^o)_{numerical}}{(M^t - M^o)_{analytical}}\right] \times 100 \qquad (۱۷)$$

که $M^o$ و $M^t$ به ترتیب مشخص کننده جرم اولیه در میدان جریان و جرم در زمان $t$ هستند هر چه این نسبت به یک نزدیکتر باشد، مطلوب‌تر و نشان‌دهنده توانایی بیشتر آن روش عددی برای بقای جرم است [Roman and Santini (1998)]. ضریب عملکرد، ضریبی است که بیان کننده عملکرد روش عددی است. این ضریب با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$RRM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}((\alpha_i - n_i)/\alpha_i)^2}{k}} \qquad (۱۸)$$

که $\alpha_i$ جواب تحلیلی مسئله در نقطه $i$ است و می‌توان به جای آن جوابی که از شبکه‌ریز به دست می آید [Ataie-Ashtiaini et al. (1999)] . قرارداد، $n_i$ جواب عددی مسئله مورد نظر در نقطه $i$ و $k$ تعداد نقاط مقایسه است.هر چه RRM کمتر باشد عملکرد روش عددی بهتر است. چنانچه $PRM \le 0.01$ نشان دهنده عملکرد عالی روش و $PRM \le 0.01$ نشان دهنده عملکرد بسیار ضعیف روش عددی است. حالتهای مختلف مورد بررسی در این مقاله را می‌توان در جداول (۱) و (۲) خلاصه کرد. که $\alpha_i$ جواب تحلیلی مسئله در نقطه $i$ است و می‌توان به جای آن جوابی که از شبکه‌ریز به دست می آید [Ataie-Ashtiaini et al. (1999)] . قرارداد، $n_i$ جواب عددی مسئله مورد نظر در نقطه $i$ و $k$ تعداد نقاط مقایسه است.هر چه RRM کمتر باشد عملکرد روش عددی بهتر است. چنانچه $PRM \le 0.01$ نشان دهنده عملکرد عالی روش و $PRM > 0.1$ نشان دهنده عملکرد بسیار ضعیف روش عددی است. حالتهای مختلف مورد بررسی در این مقاله را می‌توان در جداول (۱) و (۲) خلاصه کرد.

**جدول ۱- حالتهای مختلف شبیه سازی**

| شرط همگرایی | روش محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی با ذکر شماره | نحوه محاسبه ضریب ذخیره ویژه | نوع گسسته‌سازی | شکل معادله ریچاردز مورد بررسی |
|---|---|---|---|---|
| شرط همگرایی نسبی ( خطای نسبی مجاز $۱۰^{-۶}$) | ۱تا۵ | مماس | کاملاً ضمنی | شکل وابسته به هد |
| | ۱تا۵ | وتر | | |
| | ۱تا۵ | مماس | کرنک- نیکلسون | |
| | ۱تا۵ | وتر | | |
| | ۱تا۵ | مماس | کاملاً ضمنی | شکل ترکیبی |
| | ۱تا۵ | وتر | | |
| | ۱تا۵ | مماس | کرنک- نیکلسون | |
| | ۱تا۵ | وتر | | |

## ۳- نتایج

در این بخش به منظور درک بهتر مطالب ارائه شده، از یک مثال استفاده می‌کنیم. این مثال که داده‌های آن توسط Haverkamp (1997) شده به این شرح است:

**جدول ۲-حالتهای مختلف شبیه‌سازی‌ها برای یک ضریب هدایت هیدرولیکی خاص**

| شرط همگرایی | نوع گسسته سازی | شکل معادله ریچاردز مورد بررسی |
|---|---|---|
| استاندارد | کاملاً ضمنی | شکل وابسته به هد |
| ترکیبی | | |
| θ | | |
| استاندارد | کرنک - نیکلسون | |
| ترکیبی | | |
| θ | | |
| استاندارد | کاملاً ضمنی | شکل ترکیبی |
| ترکیبی | | |
| θ | | |
| استاندارد | کرنک - نیکلسون | |
| ترکیبی | | |
| θ | | |

در خاک مورد استفاده Haverkamp و همکارانش رابطه بین شاخص‌های $\theta(h)$ و $K(h)$ با هد فشار به صورت زیر است:

$$\theta(h)=\frac{\alpha(\theta_s-\theta_r)}{\alpha+|h|^{\beta}}+\theta_r \qquad (۱۹\text{-}a)$$

$$K(h)=ks\frac{A}{A+|h|^{\gamma}} \qquad (۱۹\text{-}b)$$

که A و $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ و m و n شاخص های بی‌بعد هستند. $\theta_s$ ذخیره رطوبت در شرایط اشباع و $\theta r$ رطوبت باقیمانده است. $Ks\,[L/T]$ هدایت هیدرولیکی در حالت اشباع و $h[L]$ هد فشار و $\theta$ ذخیره حجمی رطوبت است. رابطه(۱۹-a) و (۱۹-b) توسط Haverkamp and Vauclin (1979) برای یک نوع شن با مقادیر پارامترهای نشان داده شده در جدول(۳) ارائه شده است.

این مثال برای حالتهای ارائه شده در جدول (۱)وبا شرایط اولیهٔ $h(z,0)=-۶۱/۵\ cm$ وشرایط مرزی $h(۴۰\ cm,t)=h_{top}=-۲۰/۷\ cm$ و $h(0,t)=h_{bottom}=-۶۱/۵\ cm$ حل شده است و نتایج در جداول(۴) الی(۱۰) ارایه شده است. در جدول (۴) این مثال برای شکلی از معادله ریچاردز که در آن فشار متغیر وابسته است و با روش گسسته‌سازی کاملاً ضمنی، گام مکانی $(\Delta z)$ ۱ cm برای ۵ گام زمانی $(\Delta t)$ مختلف ۱S و ۱۰S و ۳۰S و ۱۲۰S و گام زمانی تجمعی که در آن حداقل گام زمانی۱ ۰/۰ ثانیه و حداکثر گام زمانی ۱۲۰ ثانیه و گام زمانی پایه ۱ ثانیه است و نیز دو حالت مختلف تخمین ضریب ذخیره ویژه (فرم مماس و فرم وتر) و ۵ حالت مختلف تخمین ضریب هدایت هیدرولیکی حل شده و نتایج در جدول مربوطه ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از روش تخمین وتر برای محاسبه ضریب ذخیره ویژه، باعث بهبود تعادل جرمی می‌شود ودرعین حال تغییرهای چندانی در متوسط تعداد سعی و خطاها نسبت به روش مماس حاصل نشده است. در بعضی موارد شاهد کاهش جزئی در تعداد متوسط سعی و خطاها در اثر استفاده از این روش هستیم و در بعضی از موارد بالعکس، بگونه‌ای که نمی‌توان روند خاصی را بیان کرد. با استفاده از روش تخمین وتر در محاسبه ضریب ذخیره ویژه در اکثر موارد شاهد کاهش ضریب عملکرد RRM یعنی بهبود عملکرد روش عددی هستیم بطوریکه در کلیه حالتهای بررسی شده، بجز در حالتی که ضریب هدایت هیدرولیکی به روش۴ یا روش بالادست محاسبه شده است، کاهش نسبتاً قابل ملاحظه در ضریب عملکردRRM مشاهده می شود و این کاهش به ویژه در حالتی که ضریب هدایت هیدرولیکی از روش ۳ یا روش ۵ محاسبه می‌شود، چشمگیرتر است. کمترین تعداد متوسط سعی و خطاها مربوط به حالتی است که هدایت هیدرولیکی از روش ۱ و روش ۴ محاسبه می‌شود اما محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی از روش ۴ ضریب عملکرد بیشتری نسبت به روشهای دیگر محاسبه این ضریب می‌دهد. با توجه به مطالب بیان شده بنظر می‌رسد که در شبیه‌سازی عددی معادله ریچاردز در حالتی که متغیر وابسته فشار است و در حالتی که گسسته‌سازی مسئله با استفاده از روش کاملاً ضمنی صورت می‌گیرد، استفاده از روش تخمین شیب وتری یا روش وتر برای محاسبه ضریب ذخیره ویژه و استفاده از روشهای ۱، ۳ یا ۵ برای محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی نتایج بهتری ارائه می‌دهد.

نکته قابل توجه دیگر این است که وقتی از روش وتر برای تخمین ضریب ذخیره ویژه استفاده شده است، تعادل جرمی بسیار مطلوب است و این تعادل جرمی نسبت به گام‌های زمانی انتخاب شده و مورد بررسی حساس نیست (برخلاف روش مماس) بنابراین ملاک برای انتخاب روش محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی، می‌تواند ضریب عملکرد و زمان انجام محاسبات باشد.

**جدول ۳-مقادیر پارامترهای معادلات Haverkamp**

| نوع خاک | Ks(cm) | A | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\theta s$ | $\theta r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| شن | $۹/۴۴ \times ۱۰^{-۳}$ | $۱/۱۷۵ \times ۱۰^{۶}$ | $۱/۶۱۱۰ \times ۱۰^{۶}$ | ۴/۴۷۴ | ۳/۹۶ | ۰/۲۸۷ | ۰/۰۷۵۰ |

در جدول (۵) این مثال برای فرم ترکیبی معادله ریچاردز با گسسته‌سازی کاملاً ضمنی و با حالتهایی مشابه حالتهای ذکر شده در جدول(۴) حل شده است .در هر دو روش مربوط به محاسبه ضریب ذخیره ویژه (روش مماس و روش وتر) تعادل جرمی مطلوب بدست می‌آید. در عین حال استفاده از روش وتر برای محاسبه ضریب ذخیره ویژه تغییر چندانی در مقدار ضریب عملکرد ایجاد نمی‌کند و تعداد متوسط سعی و خطاها نیز در اکثر موارد بیشتر شده است (در ۱۸ مورد از ۲۵ مورد بررسی شده) اگرچه تغییرها چندان زیاد نیست. البته در حالتی که از گام زمانی تجمعی و در برخی از حالتهایی که برای محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی از روشهای ۲ یا ۵ استفاده شده روش وتر بهتر جواب داده است.

مشابه حالت قبل استفاده از روش ۱ و روش ۴ برای محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی کمترین تعداد متوسط سعی و خطا را می‌طلبد ولی به علت ضریب عملکرد بالای روش ۴ نسبت به سایر روشها استفاده از این روش برای محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی پیشنهاد نمی‌شود. روشهای ۱ و ۳ و۵ برای محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی نتایج بهتری را ارائه می‌کند. نکته قابل توجه دیگر این است که روش کاملاً ضمنی برای شکل ترکیبی معادله ریچاردز و در حالتی که ضریب ذخیره ویژه از روش وتر محاسبه می‌شود، با روش کاملاًضمنی برای حالتی از معادله ریچاردز که در آن فشار متغیر وابسته است و در حالتی که ضریب ذخیره ویژه از روش وتر محاسبه می شود جوابهای یکسانی می‌دهد. با توجه به مطالب بیان شده می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از روش تخمین وتر برای محاسبه ضریب ذخیره ویژه معادله ریچاردز در حالتی که فشار متغیر وابسته است و با انتخاب نحوه مناسب محاسبه ضریب هدایت هیدرولیکی بین بلوکها می‌توان این روش را بهبود بخشید . همانطور که بیان شد در مواردی از فرم ترکیبی معادله ریچاردز به روش مماس نیز بهتر جواب می دهد و اختلاف قابل ملاحظه ای که در بین نتایج شکل ترکیبی معادله ریچاردز و شکلی از معادله که در آن فشار متغیر وابسته است در مقایسه‌ای که توسط [Celia and Bouloutas (1990)] بچشم می‌خورد از بین می‌رود و به عبارتی شکلی از معادله که متغیر وابسته آن فشار است به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود می‌یابد.

بر اساس نتایج حاصل از تحلیل نتایج شبیه‌سازی عددی با استفاده از روش گسسته‌سازی کرنک – نیکلسون این نتیجه حاصل می‌شود که این فرم گسسته سازی برای هر نسبتی از $\Delta t$ به $\Delta z$ جواب نمی‌دهد و باید برای این فرم گسسته‌سازی شرط پایداری تعریف کرد. همچنین با مقایسه نتایج بدست آمده برای حالتی که گام زمانی ۱ثانیه و حالتی که از گام زمانی تجمعی استفاده شده است، نشان می‌دهد که حتی اگر شرط پایداری هم برقرار باشد فرم گسسته‌سازی کاملاً ضمنی تعادل جرمی بهتری نسبت به فرم گسسته‌سازی کرنک – نیکلسون می‌دهد و به دلایل ذکر شده استفاده از این فرم گسسته‌سازی پیشنهاد نمی‌شود.

در جداول (۸) تأثیر گام مکانی برروی نتایج حالت های مختلف بررسی شده است. با توجه به نتایج بدست آمده از جداول می‌توان گفت درشکلی از معادله ریچاردز که فشار متغیر وابسته است، در حالت گسسته‌سازی کاملاً ضمنی و در حالتی که ضریب ذخیره ویژه از روش مماس محاسبه می‌شود با افزایش گام مکانی تا جایی که گام زمانی کمتر یا مساوی ۳۰ ثانیه است تعادل جرمی نسبت به حالت مشابه با گام مکانی کمتر بهبود یافته است و در همه موارد جز در حالتی که گام زمانی ۳۰ ثانیه است و ضریب ذخیره ویژه از روش وتر محاسبه شده عملکرد شبیه‌سازی عددی کاهش می‌یابد. در کلیه موارد نیز با کاهش زمان محاسبه ها مواجه هستیم.

در حالتی که از شکل ترکیبی معادله و با شرایط مشابه استفاده می شود نیز کم وبیش نتایج مشابهی به دست آمده است با این تفاوت که تعادل جرمی تغییر نمی‌کند و در کلیه موارد با کاهش عملکرد و کاهش زمان محاسبه ها مواجه هستیم. بنابراین در این شکل از معادله ریچاردز بسته به میزان حساسیت برروی دقت و زمان انجام محاسبه ها، نسبت گام زمانی به گام مکانی انتخاب می‌شود. بر اساس نتایج حاصل از تحلیل نتایج شبیه سازی به فرم گسسته‌سازی کرنک-نیکلسون، بهبودی که در جوابهای حاصله در اثر استفاده از گام مکانی ۴ cm مشاهده می‌شود تاییدی است بر این مطلب که در روش کرنک-نیکلسون شرط پایداری لازم است.

درجدول (۹)سه حالت مختلف همگرایی برای شکل ترکیبی و شکلی از معادله ریچاردز که متغیر وابسته فشار است، در حالتی که ضریب ذخیره ویژه از روش مماس محاسبه شده و گسسته‌سازی بصورت کاملاً ضمنی است، برای مقادیر خطای مطلق و نسبی زیر با هم مقایسه شده است:

$$\delta r = 0.001$$
$$\delta a = 1cm$$
$$\delta\theta = 0.0001$$

در فرم ترکیبی استفاده از روش همگرایی حالت $\theta$ نسبت به روش همگرایی ترکیبی و استاندارد تعادل جرمی بهتری دارد ولی در عین حال زمان انجام محاسبه ها نسبت به دو فرم دیگر به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته است. با مقایسه ضرایب عملکرد متوجه می‌شویم که فرم همگرایی حالت $\theta$ عملکرد بهتری نسبت به دو فرم همگرایی ترکیبی و استاندارد دارد و به عبارتی بین تعادل جرمی و عملکرد روش عددی رابطه‌ای مستقیم وجود دارد.

در شکلی از معادله که متغیر وابسته فشار است وبا پارامترهایی مشابه آنچه در بالا ذکرشد فرم همگرایی ترکیبی تعادل جرمی بهتر و عملکرد بهتری نسبت به دو شکل دیگر همگرایی استاندارد و همگرایی حالت $\theta$ دارد و در عین حال زمان انجام محاسبه ها نیز از سایر روشهای همگرایی بهتر است بنابراین گزینه برتر است.

در جدول (۱۰) محاسبه ها برای فرم ترکیبی معادله ریچاردز در حالت گسسته‌سازی کاملاً ضمنی و روش تانژانت برای محاسبه ضریب ذخیره ویژه با پارامترهای همگرایی زیر:

$$\delta r = 0.001$$
$$\delta a = 0.001 cm$$
$$\delta\theta = 0.0001$$

صورت می‌گیرد و ما شاهد بهبود و به حد مطلوب رسیدن تعادل جرمی برای هر سه فرم همگرایی و نزدیک شدن ضریب عملکرد هر سه فرم همگرایی به یکدیگر هستیم. از لحاظ زمان انجام محاسبه ها ابتدا شرط همگرایی فرم ترکیبی، سپس فرم $\theta$ ودر نهایت فرم استاندارد قرار دارند و این بیانگر این مطلب است که تصمیم‌گیری برروی انتخاب شرط همگرایی به خطای مطلق و خطای نسبی موردنظر و اینکه حساسیت برروی دقت مسئله یا زمان انجام محاسبه ها بیشتراست، دارد.

## ۴- خلاصه و نتیجه گیری

در این مقاله حل عددی معادله جریان آب در ناحیه غیر اشباع و روشهای مختلف فرموله کردن معادلات و گسسته سازی مورد بررسی قرار گرفت .از نتایج حاصل چنین بنظر می رسد که با انتخاب نحوه مناسب محاسبه پارامترهای معادله جریان آب در خاک غیر اشباع(معادله ریچاردز ) و در صورتی که از روش جداسازی کاملاً ضمنی برای گسسته سازی معادله استفاده شود، شکلی از معادله ریچاردز که در آن فشار متغیر وابسته است نتایج بسیار نزدیکی با شکل ترکیبی معادله ریچاردز که طبق تحقیقات اخیر دانشمندانی نظیر[Celia and Bouloutas (1990)] به عنوان راه حل برتر معرفی شده ، می‌دهد و حتی در مواردی نتایج بهبود یافته است .

همچنین با توجه به نتایج ارائه شده این نکته مشهود است که با توجه به اینکه حساسیت روی دقت، عملکرد و زمان انجام محاسبه ها از چه اولویتی برخوردار است، می توان انتخاب مناسبتری از شکل و فرم معادله مورد استفاده، نحوه محاسبه شاخص ها و روش گسسته سازی ارائه کرد.

جدول ۴ - نتایج مربوط به روش گسسته‌سازی کاملاً ضمنی برای شکل وابسته به هد معادله ریچاردز و با گام مکانی ۱ سانتیمتر(شماره k براساس روش محاسبه مندرج در بخش ۳-۳ تنظیم شده است)

| | K=۱ | | K=۲ | | K=۳ | | K=۴ | | K=۵ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | مماس | ولر | مماس | ولر | مماس | ولر | مماس | ولر | مماس | ولر |
| گام زمانی در ۱ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۸۱E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۹۲E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۸۸E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۷۵E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۸۹E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۴/۸۲ | ۴/۷۶ | ۵/۳۴ | ۵/۳۸ | ۴/۹۶ | ۴/۹۶ | ۴/۸۲ | ۴/۷۸ | ۵/۰۲ | ۵/۱ |
| ضریب عملکرد | ۴/۳۲E-۰۳ | ۹/۳۰E-۰۳ | ۴/۳۹E-۰۲ | ۳/۹۱E-۰۲ | ۱/۰۹E-۰۲ | ۶/۹۷E-۰۳ | ۵/۶۹E-۰۲ | ۵/۹۵E-۰۲ | ۱/۴۱E-۰۲ | ۹/۹۲E-۰۳ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۲۰E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۳۹E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۲۲E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۱۷E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۲۲E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱۲/۵ | ۱/۴۳ | ۱۴/۸ | ۱۴/۷ | ۱۴/۱ | ۱۳/۸ | ۱۳/۶ | ۱۳ | ۱۴/۳ | ۱۳/۹ |
| ضریب عملکرد | ۲/۱۲E-۰۲ | ۱/۰۸E-۰۲ | ۵/۵۵E-۰۲ | ۱/۷۸E-۰۲ | ۳/۴۶E-۰۲ | ۷/۵۹E-۰۳ | ۳/۹۴E-۰۲ | ۵/۷۰E-۰۲ | ۲/۵۳E-۰۲ | ۷/۷۸E-۰۳ |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۸/۷۴E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۷۶E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۷۵E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۷۲E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۷۵E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۲۳/۶ | ۲۴/۳ | ۲۶/۲ | ۲۴/۸ | ۲۴/۵ | ۲۴ | ۲۳/۲ | ۲۲/۵ | ۲۴/۸ | ۲۴/۲ |
| ضریب عملکرد | ۵/۲۰E-۰۲ | ۱/۹۱E-۰۲ | ۷/۱۷E-۰۲ | ۱/۷۱E-۰۲ | ۴/۰۸E-۰۲ | ۱/۶۸E-۰۲ | ۲/۸۸E-۰۲ | ۵/۵۶E-۰۲ | ۶/۱۷E-۰۲ | ۱/۴۴E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۸/۱۱E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۱۲E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۱۱E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۰۷E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۱۱E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۴۵/۳ | ۴۷ | ۴۹ | ۴۸/۷ | ۴۶/۷ | ۴۸ | ۴۲/۷ | ۴۴ | ۴۷/۳ | ۴۷/۷ |
| ضریب عملکرد | ۱/۱۱E-۰۱ | ۵/۲۸E-۰۲ | ۱/۱۸E-۰۱ | ۵/۱۱E-۰۲ | ۱/۱۵E-۰۱ | ۵/۱۹E-۰۲ | ۷/۹۵E-۰۲ | ۶/۷۹E-۰۲ | ۱/۱۵E-۰۱ | ۵/۱۷E-۰۲ |
| گام زمانی تجمعی | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۶۴E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۷۳E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۶۹E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۶۰E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۷۰E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| تعداد تکرار | *۶۹* | *۶۸* | *۷۹* | *۷۹* | *۷۲* | *۷۱* | *۷۰* | *۶۹* | *۷۴* | *۷۴ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱۰/۷ | ۱۰/۴ | ۱۰/۵ | ۱۰/۵ | ۱۰/۵ | ۱۰/۵ | ۱۰/۹ | ۱۰/۷ | ۱۰/۴ | ۱۰/۷ |
| ضریب عملکرد | ۷/۷۸E-۰۳ | ۱/۴۴E-۰۲ | ۴/۰۵E-۰۲ | ۳/۱۲E-۰۲ | ۱/۲۴E-۰۲ | ۶/۷۴E-۰۳ | ۵/۵۰E-۰۲ | ۶/۱۶E-۰۲ | ۱/۷۴E-۰۲ | ۹/۵۴E-۰۳ |

جدول ۵- نتایج مربوط به روش گسسته‌سازی کاملاً ضمنی برای شکل ترکیبی معادله ریچاردز و با گام مکانی یک سانتیمتر(شمارهk براساس روش محاسبه مندرج در بخش ۳-۳ تنظیم شده است)

| | K=۱ | | K=۲ | | K=۳ | | K=۴ | | K=۵ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | مماس | وتر | مماس | وتر | مماس | وتر | مماس | وتر | مماس | وتر |
| گام زمانی در ۱ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۴/۷۲۵ | ۴/۷۴۳۸۹ | ۵/۴۰۵۵۶ | ۵/۳۷۵ | ۴/۹۹۷۲۲ | ۴/۹۵۸۳۳۳ | ۴/۷۳۳۳ | ۴/۷۸۰۵۵۶ | ۵/۱۱۶۶۶۷ | ۵/۰۹۷۲۲۲ |
| ضریب عملکرد | ۹/۳۰E-۰۳ | ۹/۳۰E-۰۳ | ۲/۹۱E-۰۲ | ۲/۹۱E-۰۲ | ۶/۹۷E-۰۳ | ۶/۹۷E-۰۳ | ۵/۹۵E-۰۲ | ۵/۹۵E-۰۲ | ۹/۹۲E-۰۳ | ۹/۹۲E-۰۳ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱۳/۱۱۱ | ۱۳/۳۳۳۳ | ۱۴/۷۵ | ۱۴/۷۲۲۲۲ | ۱۳/۶۹۴۴ | ۱۳/۸۰۵۵۶ | ۱۲/۶۳۸۸۹ | ۱۳ | ۱۳/۸۳۳۳ | ۱۳/۹۴۴۴ |
| ضریب عملکرد | ۱/۰۸E-۰۲ | ۱/۰۸E-۰۲ | ۱/۷۸E-۰۲ | ۱/۷۸E-۰۲ | ۷/۵۹E-۰۳ | ۷/۵۹E-۰۳ | ۵/۷۰E-۰۲ | ۵/۷۰E-۰۲ | ۷/۷۸E-۰۳ | ۷/۷۸E-۰۳ |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۲۲/۱۶۶۷ | ۲۳/۲۵ | ۲۳/۷۵ | ۲۴/۷۵ | ۲۲/۹۱۶۷ | ۲۴ | ۲۰/۸۳۳۳۳ | ۲۲/۵ | ۲۳ | ۲۴/۱۶۶۶۷ |
| ضریب عملکرد | ۱/۹۱E-۰۲ | ۱/۹۱E-۰۲ | ۱/۷۱E-۰۲ | ۱/۷۱E-۰۲ | ۱/۶۸E-۰۲ | ۱/۶۸E-۰۲ | ۵/۵۴E-۰۲ | ۵/۵۴E-۰۲ | ۱/۴۴E-۰۲ | ۱/۴۴E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۴۰/۳۳۳۳ | ۴۷ | ۴۱/۶۶۶۷ | ۴۸/۶۶۶۶۷ | ۴۰/۶۶۶۷ | ۴۸ | ۳۴/۶۶۶۷ | ۴۴ | ۴۱/۳۳۳۳ | ۴۷/۶۶۶۷ |
| ضریب عملکرد | ۵/۲۸E-۰۲ | ۵/۲۸E-۰۲ | ۵/۱۱E-۰۲ | ۵/۱۱E-۰۲ | ۵/۱۹E-۰۲ | ۵/۱۹E-۰۲ | ۶/۷۹E-۰۲ | ۶/۷۹E-۰۲ | ۵/۱۷E-۰۲ | ۵/۱۷E-۰۲ |
| گام زمانی تجمعی | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| تعداد تکرار | *۶۵* | *۶۸* | *۱۰۵* | *۷۹* | *۷۷* | *۷۱* | *۷۶* | *۶۹* | *۷۹* | *۷۳* |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۰۴E+۰۱ | ۱/۰۴E+۰۱ | ۸/۵۲E+۰۰ | ۱/۰۵E+۰۱ | ۱/۰۱E+۰۱ | ۱/۰۵E+۰۱ | ۹/۶۱E+۰۰ | ۱/۰۷E+۰۱ | ۱/۰۲E+۰۱ | ۱/۰۷E+۰۱ |
| ضریب عملکرد | ۲/۰۴E-۰۲ | ۱/۴۴E-۰۲ | ۲/۴۸E-۰۲ | ۳/۱۲E-۰۲ | ۷/۵۵E-۰۳ | ۶/۷۲E-۰۳ | ۵/۹۸E-۰۲ | ۶/۱۶E-۰۲ | ۷/۷۰E-۰۳ | ۹/۵۳E-۰۳ |

جدول ۶-نتایج مربوط به روش گسسته‌سازی کرنک - نیکلسون برای شکل ترکیبی معادله ریچاردز و با گام مکانی یک سانتیمتر(شمارهk براساس روش محاسبه مندرج در بخش ۳-۳ تنظیم شده است)

| | K=۱ | | K=۲ | | K=۳ | | K=۴ | | K=۵ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | مماس | وتر | مماس | وتر | مماس | وتر | مماس | وتر | مماس | وتر |
| گام زمانی در ۱ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۳E+۰۰ | ۱/۰۳E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۴/۸۴ | ۴/۹۲ | ۵/۷ | ۵/۷۱ | ۵/۱۴ | ۵/۱۴ | ۵/۰۳ | ۵/۰۲ | ۵/۲۵ | ۵/۲۳ |
| ضریب عملکرد | ۱/۲۲E-۰۲ | ۱/۲۲E-۰۲ | ۲/۵۲E-۰۲ | ۲/۵۲E-۰۲ | ۳/۵۸E-۰۳ | ۳/۵۸E-۰۳ | ۶/۱۹E-۰۲ | ۶/۱۹E-۰۲ | ۶/۲۸E-۰۳ | ۶/۲۸E-۰۳ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۲/۹۰E+۰۱ | ۲/۹۰E+۰۱ | ۴/۹۲E+۰۰ | ۴/۹۲E+۰۰ | ۷/۰۶E+۰۰ | ۷/۰۶E+۰۰ | -۱/۴۹E+۰۰ | -۱/۴۹E+۰۰ | -۲/۰۹E+۰۰ | -۲/۰۹E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱۸/۵ | ۱۹/۶ | ۱۹/۱ | ۱۸/۸ | ۱۸/۱ | ۱۸/۷ | ۱۹/۹ | ۲۰/۳ | ۱۸/۸ | ۱۸/۸ |
| ضریب عملکرد | ۶/۹۱E-۰۲ | ۶/۹۱E-۰۲ | ۴/۷۲E-۰۲ | ۴/۷۲E-۰۲ | ۶/۰۲E-۰۲ | ۶/۰۲E-۰۲ | ۱/۱۹E-۰۱ | ۱/۱۹E-۰۱ | ۷/۵۴E-۰۲ | ۷/۵۴E-۰۲ |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | | | | | | | | | | |
| ضریب عملکرد | | | | | | | | | | |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | | | | | | | | | | |
| ضریب عملکرد | | | | | | | | | | |
| گام زمانی تجمعی | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۲E+۰۰ |
| تعداد تکرار | ۸۴ | ۸۴ | ۱۰۴ | ۱۰۴ | ۱۱۶ | ۹۴ | ۹۰ | ۱۲۵ | ۱۰۲ | ۹۷ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۰۷E+۰۱ | ۱/۰۹E+۰۱ | ۱/۱۰E+۰۱ | ۱/۱۲E+۰۱ | ۹/۲۴E+۰۰ | ۱/۰۸E+۰۱ | ۱/۱۰E+۰۱ | ۹/۴۴E+۰۰ | ۱/۰۵E+۰۱ | ۱/۰۸E+۰۱ |
| ضریب عملکرد | ۲/۷۶E-۰۲ | ۱/۸۷E-۰۲ | ۲/۴۹E-۰۲ | ۲/۲۴E-۰۲ | ۴/۹۸E-۰۳ | ۵/۸۷E-۰۳ | ۷/۰۵E-۰۲ | ۶/۵۵E-۰۲ | ۳/۷۸E-۰۳ | ۵/۸۹E-۰۳ |

جدول ۷-نتایج مربوط به روش گسسته‌سازی کرنک نیکلسون برای شکل وابسته به هد معادله ریچاردز وبا گام مکانی یک سانتیمتر(شماره k براساس روش محاسبه مندرج در بخش ۳-۳ تنظیم شده است)

| | K=۱ | | K=۲ | | K=۳ | | K=۴ | | K=۵ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| گام زمانی در ۱ ثانیه | مسلس | ولر | مسلس | ولر | مسلس | ولر | مسلس | ولر | مسلس | ولر |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۹۸E-۰۱ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۹/۹۹E-۰۱ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۳E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۱E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۴/۹۷ | ۴/۹۲ | ۵/۶۳ | ۵/۷۱ | ۵/۱۱ | ۵/۱۴ | ۵/۱۶ | ۵/۰۸ | ۵/۱۷ | ۵/۲۱ |
| ضریب عملکرد | ۸/۷۰E-۰۲ | ۱/۲۲E-۰۲ | ۲/۰۱E-۰۲ | ۳/۵۲E-۰۲ | ۷/۵۸E-۰۳ | ۳/۵۸E-۰۳ | ۵/۹۰E-۰۲ | ۶/۱۹E-۰۲ | ۱/۰۶E-۰۲ | ۶/۲۸E-۰۳ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | **** | ۲/۹۰E+۰۱ | **** | ۴/۹۲E+۰۰ | **** | ۷/۰۴E+۰۰ | **** | -۱/۳۹E+۰۰ | **** | -۲/۰۹E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | | ۱۹/۶ | | ۱۸/۸ | | ۱۸/۷ | | ۲۰/۳ | | ۱۸/۸ |
| ضریب عملکرد | | | | | | | | | | |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | | | | | | | | | | |
| ضریب عملکرد | | | | | | | | | | |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** | **** |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | | | | | | | | | | |
| ضریب عملکرد | | | | | | | | | | |
| گام زمانی تجمعی | | | | | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۹۱E-۰۱ | ۱/۰۳E+۰۰ | ۹/۹۵E-۰۱ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۹/۹۴E-۰۱ | ۱/۰۲E+۰۰ | ۹/۹۳E-۰۱ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۹/۹۴E-۰۱ | ۱/۰۲E+۰۰ |
| تعداد تکرار | *۸۸* | *۸۴* | *۱۰۸* | *۱۰۴* | *۱۲۸* | *۹۴* | *۱۰۵* | *۱۲۵* | *۹۷* | *۹۷* |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۱۱E+۰۱ | ۱/۰۹E+۰۱ | ۱/۰۹E+۰۱ | ۱/۱۲E+۰۱ | ۸/۴۲E+۰۰ | ۱/۰۸E+۰۱ | ۱/۰۳E+۰۱ | ۹/۴۶E+۰۰ | ۱/۰۷E+۰۱ | ۱/۰۸E+۰۱ |
| ضریب عملکرد | ۱/۲۹E-۰۲ | ۱/۸۷E-۰۲ | ۴/۴۲E-۰۲ | ۲/۲۶E-۰۲ | ۹/۵۲E-۰۳ | ۵/۸۷E-۰۳ | ۵/۷۴E-۰۲ | ۷/۴۴E-۰۲ | ۱/۰۶E-۰۲ | ۵/۸۹E-۰۳ |

جدول ۸-الف - روش گسسته‌سازی کاملاً ضمنی برای شکل وابسته به فشار معادله با گام مکانی ۴ سانتیمتر(k از روش متوسط حسابی محاسبه شده است)

| | K=۱ | |
|---|---|---|
| گام زمانی در ۱ ثانیه | تانژانت | سکانت |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۹۳E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۴/۶ | ۳/۵۴ |
| ضریب عملکرد | ۴/۸۱E-۰۲ | ۴/۹۵E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۴۸E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۸/۷۸ | ۸/۳۱ |
| ضریب عملکرد | ۳/۷۴E+۰۰ | ۴/۷۶E-۰۲ |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۸/۸۸E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱۳/۸ | ۱۳/۱ |
| ضریب عملکرد | ۳/۴۱E-۰۲ | ۴/۶۸E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۷/۸۲E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۲۲/۷ | ۲۴ |
| ضریب عملکرد | ۹/۳۷E-۰۲ | ۶/۳۴E-۰۲ |
| گام زمانی تجمعی | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۷۱E-۰۱ | ۱/۰۰E+۰۰ |
| تعداد تکرار | ۴۷ | ۴۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۷/۵۳E+۰۰ | ۷/۶۳E+۰۰ |
| ضریب عملکرد | ۴/۱۶E-۰۲ | ۵/۸۲E-۰۲ |

| | K=۱ | |
|---|---|---|
| گام زمانی در ۱ ثانیه | تانژانت | سکانت |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۹۸E-۰۱ | ۱/۰۱E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۳/۶۱ | ۳/۵۶ |
| ضریب عملکرد | ۴/۹۲E-۰۲ | ۵/۰۶E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۹۲E-۰۱ | ۱/۰۵E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۹/۳۳ | ۸/۴۲ |
| ضریب عملکرد | ۴/۶۰E-۰۲ | ۵/۸۴E-۰۲ |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | **** | ۱/۱۹E+۰۰ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | | ۱۷/۱ |
| ضریب عملکرد | | ۸/۰۴E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | **** | **** |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | | |
| ضریب عملکرد | | |
| گام زمانی تجمعی | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۹۵E-۰۱ | ۱/۰۲E+۰۰ |
| تعداد تکرار | ۴۴ | ۴۳ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۸/۵۹ | ۸/۰۹ |
| ضریب عملکرد | ۵/۵۳E-۰۲ | ۶/۳۴E-۰۲ |

جدول ۹- نتایج مربوط به روش گسسته‌سازی کاملاً ضمنی و استفاده از روش مماس برای محاسبه ضریب ذخیره ویژه درمعادله ریچاردز(k از روش متوسط حسابی محاسبه شده است)

| | شکل ترکیبی معادله ریچاردز | | | شکل وابسته به هد معادله ریچاردز | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | k=۱ | | | k=۱ | | |
| | شکل استاندارد | شکل ترکیبی | شکلθ | شکل استاندارد | شکل ترکیبی | شکلθ |
| گام زمانی در ۱ ثانیه | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۸/۸۹E-۰۱ | ۹/۵۷E-۰۱ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۹/۲۳E-۰۱ | ۹/۷۷E-۰۱ | ۹/۸۸E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۳۲۸ | ۱/۳۱۱ | ۱/۳۹۷ | ۱/۳۳۸ | ۱/۳۱۳۸ | ۱/۵۲۸ |
| ضریب عملکرد | ۲/۲۴E-۰۲ | ۲/۳۸E-۰۲ | ۱/۲۲E-۰۲ | ۱/۷۴E-۰۲ | ۱/۶۹E-۰۲ | ۸/۸۲E-۰۳ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۳E+۰۰ | ۱/۰۶E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۳۸E-۰۱ | ۱/۰۴E+۰۰ | ۹/۱۹E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۹۱۶ | ۱/۶۹۴ | ۴/۰۸۳۳ | ۱/۹۴۴ | ۱/۷۵ | ۴/۲۲ |
| ضریب عملکرد | ۲/۸۰E-۰۲ | ۴/۲۲E-۰۲ | ۱/۰۸E-۰۲ | ۷/۳۲E-۰۳ | ۲/۳۷E-۰۲ | ۲/۱۷E-۰۲ |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۹۸E-۰۱ | ۱/۰۱E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۷۲E-۰۱ | ۹/۵۸E-۰۱ | ۸/۷۴E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۳/۳۱۶ | ۳ | ۷/۸۳۳۳ | ۳/۸۳۳ | ۲/۸۳۳ | ۸/۵ |
| ضریب عملکرد | ۲/۲۶E-۰۲ | ۳/۶۳E-۰۲ | ۱/۹۱E-۰۲ | ۵/۳۴E-۰۲ | ۳/۳۹E-۰۲ | ۵/۲۱E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۸/۰۲E-۰۱ | ۸/۱۲E-۰۱ | ۸/۱۰E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۸ | ۷/۳۳۳ | ۱۵/۳۳۳ | ۹/۳۳ | ۵/۶۷ | ۱۶/۳۳ |
| ضریب عملکرد | ۵/۵۸E-۰۲ | ۵/۷۲E-۰۲ | ۵/۲۸E-۰۲ | ۱/۲۴E-۰۱ | ۱/۱۳E-۰۱ | ۱/۱۲E-۰۱ |
| گام زمانی تجمعی | | | | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۱/۰۵E+۰۰ | ۱/۰۸E+۰۰ | ۱/۰۰E+۰۰ | ۹/۸۱E-۰۱ | ۱/۱۳E+۰۰ | ۹/۳۶E-۰۱ |
| تعداد تکرار | ۴۸ | ۴۸ | ۴۸ | ۴۸ | ۴۸ | ۴۸ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۶۷E+۰۰ | ۱/۵۴E+۰۰ | ۳/۷۵E+۰۰ | ۱/۷۷E+۰۰ | ۱/۵۶E+۰۰ | ۳/۹۶E+۰۰ |
| ضریب عملکرد | ۴/۰۸E-۰۲ | ۴/۵۹E-۰۲ | ۱/۵۶E-۰۲ | ۱/۳۹E-۰۲ | ۳/۱۳E-۰۲ | ۲/۰۳E-۰۲ |

جدول ۱۰-نتایج مربوط به روش گسسته‌سازی کاملاً ضمنی برای فرم ترکیبی معادله و استفاده از روش مماس برای محاسبه ضریب ذخیره ویژه (k از روش متوسط حسابی محاسبه شده است)

| | k=۱ | | |
|---|---|---|---|
| | شکل استاندارد | شکل ترکیبی | شکلθ |
| گام زمانی در ۱ ثانیه | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۲۳E-۰۱ | ۹/۷۷E-۰۱ | ۹/۸۸E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۳۳۸ | ۱/۳۱۳۸ | ۱/۵۲۸ |
| ضریب عملکرد | ۱/۷۴E-۰۲ | ۱/۶۹E-۰۲ | ۸/۸۲E-۰۳ |
| گام زمانی در ۱۰ ثانیه | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۳۸E-۰۱ | ۱/۰۴E+۰۰ | ۹/۱۹E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۹۴۴ | ۱/۷۵ | ۴/۲۲ |
| ضریب عملکرد | ۷/۳۲E-۰۳ | ۲/۳۷E-۰۲ | ۲/۱۷E-۰۲ |
| گام زمانی در ۳۰ ثانیه | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۸/۷۲E-۰۱ | ۹/۵۸E-۰۱ | ۸/۷۴E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۳/۸۳۳ | ۲/۸۳۳ | ۸/۵ |
| ضریب عملکرد | ۵/۳۴E-۰۲ | ۳/۳۹E-۰۲ | ۵/۲۱E-۰۲ |
| گام زمانی در ۱۲۰ ثانیه | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۸/۰۲E-۰۱ | ۸/۱۲E-۰۱ | ۸/۱۰E-۰۱ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۹/۳۳ | ۵/۶۷ | ۱۶/۳۳ |
| ضریب عملکرد | ۱/۲۴E-۰۱ | ۱/۱۳E-۰۱ | ۱/۱۲E-۰۱ |
| گام زمانی تجمعی | | | |
| بقای جرمی در ۳۶۰ ثانیه | ۹/۸۱E-۰۱ | ۱/۱۳E+۰۰ | ۹/۳۶E-۰۱ |
| تعداد تکرار | ۴۸ | ۴۸ | ۴۸ |
| گام زمانی/متوسط تعداد تکرار | ۱/۷۷E+۰۰ | ۱/۵۶E+۰۰ | ۳/۹۶E+۰۰ |
| ضریب عملکرد | ۱/۳۹E-۰۲ | ۳/۱۳E-۰۲ | ۲/۰۳E-۰۲ |

## ۵- مراجع


Ataie-Ashtiani, B., Volker, R.E., Lockington, D.A. (1999 ) "Numerical and experimental study of seepage in unconfined aquifers with a periodic boundary condition "J. Hydrology, 222 165-184.

Celia, M.A., and Bouloutas, E. (1990) "A General Mass conservative Numerical solution for the unsaturated flow equation". Water Resources Research, 26(7) 1483-1496.

Gottardi, G., and Venutelli, M. (1993 ) "Richards computer program for the numerical simulation of one-Dimensional infiltration in to Unsaturated Soil" J. Computer & Geosciences 19(9) 1239-1266

Haverkamp, R., and Vauclin, M. (1979 ) "A note on estimating finite difference interblock hydraulic conductivity, values for transient unsaturated flow problems " Water Resource Research, 15(1) 181-187

Huang, k., Mohanty, B.P., Van genuchten, Th. (1996 ) "A new convergence criterion for the modified picard iteration method to solve the variably saturated flow equation" J. Hydrology, 178 69-91.

Romano, N., Brunche, B., and Santini, A. (1998) "Numerical analysis of one-dimensional unsaturated flow in layered soils" J. Advances in Water Resources" 21 315-324.

Rathfelder, K., and Abriola, L. (1994) "Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards Equation" Water resources Research, 30(9) 2579-2586.

Tegnader, C.(2001 ) "Models for ground water flow: A numerical comparison between Richard's model and the fractional flow model" transport in porous media, 43 213-224.

Williams, G.A., Cass, I., Miller, C., Kelley, T., and Tocci, Michael. D. (2002) "Approaches for modeling. Richard's equation", center for multiphase research news, 2(2) 2-5